1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 2
Répétition 2

Version 23 septembre 2010 (V1 : 07/09/09)

Préambule

On utilise notamment la trigonométrie en mécanique (plan incliné, mouvement circulaire), en électricité (courant alternatif), pour étudier les phénomènes ondulatoires (vagues, ondes sismiques, son, lumière, ondes radio ...). Beaucoup de phénomènes naturels varient de façon périodique (alternance d'inspirations et d'expirations dans la respiration, hauteur de la marée à un endroit précis ...) et il est parfois possible de représenter de tels comportements grâce à des fonctions trigonométriques.

Classiquement, on définit un *nombre trigonométrique* comme étant une valeur d'une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Les nombres trigonométriques sont fondamentaux dans l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du plan à l'aide des coordonnées polaires et dans la forme trigonométrique (ou polaire) des nombres complexes.

En analyse, les fonctions trigonométriques sont des fonctions définies sur l'ensemble des réels ou sur une partie de celui-ci. La définition géométrique contient celle de la notion de « mesure d'angle » en radians. Une autre mesure d'angle est bien sûr le degré, 2π radians correspondant à 360 degrés. *Avez-vous une idée d'où provient la mesure en degrés (et ...pourquoi 360 degrés ?) et connaissez-vous un avantage primordial de la mesure en radians ?*

La notion de vecteur est fondamentale en physique ; elle est notamment utilisée pour caractériser un déplacement, une vitesse, une force, un champ électromagnétique. En effet, un vecteur permet de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre comme une température ou une masse. Pour définir un déplacement, par exemple, on a besoin d'une direction et d'un sens en plus d'une longueur. On utilise le produit scalaire pour déterminer le travail d'une force, la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite, ... Le produit vectoriel intervient dans le calcul du moment d'une force par rapport à un point, pour déterminer la force magnétique dans un champ, ...

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est fort détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

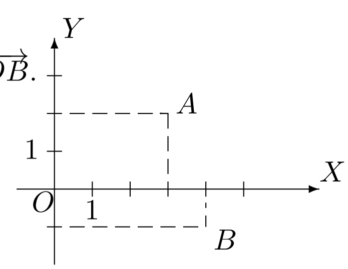
I. Trigonométrie

1. a) Comment associe-t-on un point du cercle trigonométrique à un réel donné ?
   b) Etant donné un point du cercle trigonométrique associé à un réel x, comment définir le sinus et le cosinus de ce réel ?
   c) Quelles sont les formules de trigonométrie qui lient $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ si x est un réel ? Les citer.
   d) Quels signes ont ces nombres dans les différents quadrants ?
   e) Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, dans quel quadrant travaille-t-on ?
   f) Dans ce quadrant, on sait que $\mathrm{tg}(x) = -\frac{3}{4}$. Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques.
2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de x le réel $\sin(x)$ est-il nul ?
   b) Même question pour $\cos(x)$.
   c) Déduire des points précédents pour quelle(s) valeur(s) de x les réels $\mathrm{tg}(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ sont définis.
   d) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\mathrm{tg}(x) + \mathrm{cotg}(x) - \dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)}$ est-elle définie ?
   e) En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x.

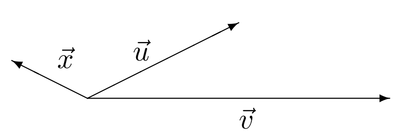
3. a) Rapprocher $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ d'une autre expression du même type qui permettrait de simplifier cette expression. Laquelle envisager ?
b) Transformer l'expression ci-dessus en utilisant la formule trouvée pour montrer que cette expression est indépendante de x.
4. a) Quelles sont les formules de trigonométrie qui permettent de passer de sommes ou différences de nombres trigonométriques à des produits de tels nombres ? Les citer.
b) Parmi ces formules, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de sinus ? La citer.
c) Prouver que $4\sin\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)\sin\left(\dfrac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.
5. a) Comment peut-on transformer le cosinus d'un réel en un sinus sans utiliser la formule fondamentale de trigonométrie ?
b) Si les sinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de 2π près ?
c) Résoudre l'équation $\sin(2x) = \cos(x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
d) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
6. a) Si les cosinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de 2π près ?
b) Résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
c) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
7. a) Si un produit de 2 facteurs est positif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?
b) Transformer $\sin(2x)$ en un produit de 2 facteurs.
c) Résoudre $\sin(2x) \geq \cos(x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

II. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. Dans un repère orthonormé du plan, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par son origine A et son extrémité B.
a) Comment écrire $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
b) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base correspondant au repère ci-contre ?
c) Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$



2. Soit la base du plan définie par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) Si $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$, donner les composantes de $\vec{a}$ dans la base $\vec{u}$, $\vec{v}$.
b) Représenter $\vec{a}$.



c) On considère le vecteur $\vec{x}$. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en donner les composantes dans cette base.
3. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.
a) Si $\vec{a} = 2\vec{u_1} + \frac{1}{2}\vec{u_2}$, quelles sont les composantes de $\vec{a}$ dans cette base ?

b) De même pour $\vec{b} = \vec{u_1} - \vec{u_2} + \vec{u_3}$.

c) Comment calcule-t-on le produit scalaire de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en français et en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?

d) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

e) Comment calcule-t-on le produit vectoriel de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?

f) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.

g) Le produit scalaire de 2 vecteurs est-il commutatif ?

h) Que dire du produit vectoriel à ce propos ?

i) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{a}$, celles de $\vec{y} = (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}$ et celles de $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $0 < x_1 < y_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ de 60° dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine O. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité P_2 du vecteur obtenu après rotation.

   a) Représenter graphiquement la situation.

   b) En faisant appel à la trigonométrie, écrire les coordonnées de P_1 sous une autre forme.

   c) En déduire les coordonnées de P_2.

   d) Donner les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1.

5. Un palet de hockey de 0,5 kg glisse (la friction est négligeable) sur une patinoire (horizontale) suite à l'action de 2 forces horizontales. La première, d'une intensité de 8 N, fait un angle de 45° avec la direction d'une droite qui, dans un repère orthonormé, a pour équation cartésienne $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. La seconde a une intensité de 4 N et fait un angle de $-15°$ avec cette même direction.

   Déterminer la valeur de l'accélération du palet ($\vec{F} = m\vec{a}$) ainsi que sa projection orthogonale sur une droite dont la direction est orthogonale à celle de la droite donnée.

   a) Représenter graphiquement le problème ci-dessus.

   b) Quel lien existe-t-il entre le coefficient angulaire d'une droite et la mesure de l'angle $\theta \in [0, \pi]$ que cette droite forme avec l'axe des abscisses ?

   c) Appliquer ce résultat à la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

   d) Quel est l'angle formé par $\vec{F_1}$ avec l'axe des abscisses ? Même question pour $\vec{F_2}$.

   e) Donner les composantes de $\vec{F_1}$ et de $\vec{F_2}$ dans la base correspondant au repère orthonormé en simplifiant au maximum leur expression.

   f) Déterminer la résultante de ces 2 forces ainsi que ses composantes.

   g) Quelles sont les composantes de l'accélération $\vec{a}$?

   h) Donner les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée.

   i) Quelle est l'expression vectorielle de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle ?

   j) Déterminer la projection orthogonale demandée de $\vec{a}$.

Université de Liège

1, 2, 3. . .Sciences
Année académique 2010-2011

Problèmes élémentaires précédents (liste 1)

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et$B$ vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

Problèmes élémentaires

Pour la répétition de mathématique de la semaine 5 : rédiger au net une résolution des problèmes ci-dessous

1. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\,500}$, la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
2. A la météo, on annonce une nuit de pluie. Le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
3. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?