1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 3
Répétition 3

Version 29 septembre 2010(V1 23/09/09)

Préambule

* Un cône circulaire droit à deux nappes (« diabolo ») peut être engendré par la rotation d'une droite sécante à une autre autour de cette autre prise comme axe de la rotation. Les coniques (ou sections coniques) peuvent être obtenues par l'intersection d'un tel cône par un plan. Selon la position de celui-ci, on obtient un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

* La trajectoire d'un corps céleste en orbite autour d'une étoile ou d'une autre planète (la Terre autour du Soleil, par exemple) est une ellipse dont l'étoile ou la planète occupe l'un des foyers. De nombreuses comètes ont des orbites elliptiques dont l'excentricité est proche de 1 mais certaines comètes peuvent avoir des trajectoires hyperboliques ou paraboliques.

* En effectuant une rotation d'une ellipse autour de son axe focal, on engendre un ellipsoïde de révolution qui jouit de la propriété de réflexion suivante : toute onde émise à partir d'un des foyers est réfléchie par l'ellipsoïde vers le second foyer. La Rotonde du Capitole à Washington est une galerie à écho de ce type à plafond elliptique : toute personne qui chuchote en l'un des foyers peut être entendue par une personne placée à l'autre foyer. Cette propriété de réflexion est également utilisée en médecine pour désintégrer des calculs rénaux au moyen d'ondes de haute densité. Le médecin positionne le patient de telle sorte que le calcul se trouve en l'un des foyers et l'émetteur des ondes réfléchies par l'ellipsoïde en l'autre foyer.

* La trajectoire d'un électron qui, sans interaction, passerait en ligne droite tout près d'un ion négatif au repos, est en fait une trajectoire hyperbolique à cause de la force de répulsion.
Si des ondes circulaires émises par deux sources oscillant en phase interfèrent, les points où l'amplitude est maximale ou minimale sont situés sur des hyperboles dont les sources en sont les foyers.

* La trajectoire décrite par un objet (ballon, saut d'un animal ...) lancé et soumis à la pesanteur est une parabole.
En effectuant une rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie, on obtient un paraboloïde de révolution qui, grâce à la propriété optique des paraboles, permet de concentrer des ondes ou des rayons en un point (antenne parabolique, four solaire, miroir de télescope ...) ou de diffuser sous forme d'un faisceau cylindrique de la lumière produite par une ampoule située au foyer (lampe de poche, phare ...).

* Les descriptions d'ensembles sont notamment utiles pour le calcul des intégrales doubles, lesquelles permettent par exemple de calculer des volumes mais aussi des centres de masse, des moments d'inertie ...

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est fort détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

I. Les coniques

1. $\boxed{\bullet}$ Soit un repère orthonormé du plan.
   a) Donner l'équation canonique du cercle centré au point de coordonnées (x_1, y_1) et de rayon R.
   b) Que devient cette équation si le cercle est centré à l'origine ?
   c) Quelle caractéristique commune ces équations ont-elles permettant de les différencier des équations d'autres coniques ?
   d) Donner l'équation canonique d'une ellipse.
   e) Comment, à la lecture de cette équation et de celles qui précèdent, peut-on immédiatement différencier celle d'un cercle de celle d'une ellipse ?
   f) Donner l'équation canonique d'une hyperbole.
   g) Comment, à la lecture de cette équation et de celle d'une ellipse, peut-on immédiatement les différencier ?
   h) Donner l'équation canonique d'une parabole.
   i) Comment, à la lecture de cette équation et de celles ci-dessus, peut-on immédiatement repérer que c'est celle d'une parabole ?
2. Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes

$$(1)\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 4 \qquad (2)\ x = y^2 + 1 \qquad (3)\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 4 \qquad (4)\ x^2 + x + y^2 = 0$$

$$(5)\ x^2 = y^2 \qquad (6)\ y^2 - \frac{x^2}{4} = 4 \qquad (7)\ y = xy^2 \qquad (8)\ y^2 + \frac{x^2}{4} = 4$$

Quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
a) d'un cercle ?
b) d'une ellipse ?
c) d'une hyperbole ?
d) d'une parabole ?

3. a) Ecrire $x^2 + x$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.
b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + x + y^2 = 0$. Le représenter graphiquement.
c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.
$\boxed{\bullet}$ d) Si on considère l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers et la valeur de son excentricité. Utiliser ces informations pour déterminer ces éléments pour les ellipses représentées ci-dessus.
$\boxed{\bullet}$ e) Si on considère l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes de ses asymptotes et la valeur de son excentricité. Utiliser ces informations pour déterminer ces éléments pour les hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
$\boxed{\bullet}$ f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.
$\boxed{\bullet}$ g) Si on considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$, donner les coordonnées de son foyer et la valeur de son excentricité. L'appliquer aux éventuelles paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.

II. Représentation d'ensembles

1. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble $\{(t, \sqrt{1+t^2}) : t \in \mathbb{R}\}$.
a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
d) Représenter graphiquement la courbe.
2. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble $\{(2\sqrt{1-x^2}, x) : x \in [-1, 1]\}$.
a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
d) Représenter graphiquement la courbe.
3. $\boxed{\bullet}$ Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f dont la représentation graphique a pour équation $y = f(x)$. Pour une même abscisse x du domaine de définition de f, on considère un point P_1 situé sous la courbe et d'ordonnée y_1, un point P_2 situé sur la courbe et d'ordonnée y_2 ainsi qu'un point P_3 situé au-dessus de la courbe et d'ordonnée y_3. Comparer $y_1,\ y_2,\ y_3$ à $f(x)$.
La courbe partage le plan en deux régions, l'une positive pour laquelle $y - f(x) > 0$ et l'autre négative pour laquelle $y - f(x) < 0$, quelle que soit la valeur du réel x du domaine de définition de f. Pour représenter un ensemble de points défini à l'aide d'inégalités, on commencera donc toujours par représenter ses « bords » qui correspondent à l'égalité.
4. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x - y - 1| \leq 1\}$.
a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 1, que vaut ce nombre ?
b) Comment écrire $|x - y - 1| = 1$ de façon équivalente ?
c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.
d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
5. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble

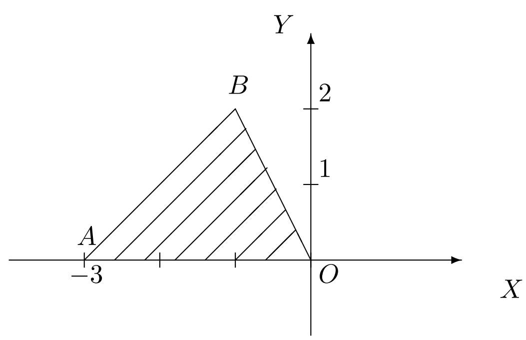
$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y \geq 1 - x^2 \text{ et } x^2 + 2y + y^2 \leq 3\right\}.$$

a) Représenter la courbe d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2 + 2y + y^2 = 3$.
b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y \geq 1 - x^2$.
c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2 + 2y + y^2 \leq 3$.
d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?

6. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble $\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{xy} \geq 1\right\}$.
a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
$\boxed{\bullet}$ b) Que peut-on dire du signe du produit xy ? En déduire une information quant au signe de x et de y.
c) Transformer l'expression $\dfrac{1}{xy} \geq 1$ en une autre équivalente.
d) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
e) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?

7. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble $\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{x^2 - y^2} \leq 1\right\}$.
a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
b) Si $P_1(x, y)$ avec $x, y > 0$ appartient à l'ensemble, que peut-on dire des points $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$, $P_4(x, -y)$ à propos de leur éventuelle appartenance à l'ensemble ?
c) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
d) La fraction $\dfrac{1}{x^2 - y^2}$ peut-elle être négative ? Si oui, que peut-on en déduire ?
e) Dans le premier quadrant, hachurer l'ensemble des points correspondants à $\dfrac{1}{x^2 - y^2} \leq 0$.
f) Dans le premier quadrant, hachurer, dans une autre couleur, l'ensemble des points correspondants à $0 \leq \dfrac{1}{x^2 - y^2} \leq 1$.
g) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?

8. Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.
b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.
c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.
d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?
e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.
g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si non, que doit-on faire ?
i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Problèmes élémentaires précédents (liste 1, liste 2)

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

Devoir

Pour la répétition de mathématique de la semaine 6 : rédiger au net une résolution des problèmes ci-dessous

1. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

2. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.
c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.
d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.