1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 4
Répétition 4

Version 8 octobre 2010(V1 03/10/09)

Préambule

Cette liste concerne essentiellement les nombres complexes ; une introduction et les notions fondamentales ont été présentées au cours, de même que des exercices de base. Il est important de pouvoir manipuler les liens qui existent entre la trigonométrie et les opérations définies au sein de l'ensemble des complexes.

Cette liste présente également encore des descriptions d'ensembles, dont la manipulation est régulière tout au long de l'année (et aussi dans les années suivantes !)

I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)
$$i-1, \quad (i-1)(1-2i), \quad \frac{1}{i-1}, \quad \frac{i^3}{i-1}, \quad (1+i)^2$$
2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)
$$i, \quad i-1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).$$
3. On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire ») en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$
$$\cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \quad (\cos 1 + i\sin 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad \sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha).$$
4. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)
$$z^2+4=0, \quad 8z^3+1=0, \quad z^2+iz+2=0$$

II. Divers

1. Reprendre l'exercice II.4 de la liste 2 et l'interpréter en utilisant les nombres complexes.
2. Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z-1| \leq 1$.
3. On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \Re z \leq 0, \Im z \geq 0\}.$$
4. On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \cos(2x) \leq y \leq \cos x\}.$$

1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Problèmes élémentaires, vecteurs, trigonométrie et coniques

Pour la répétition de mathématique de la semaine 8 : rédiger au net une résolution du problème ci-dessous

La semaine 7 est la semaine de l'interrogation de math

1. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

   où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
   a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.
   b) Si la norme de la vitesse initiale vaut 20 m/s et si l'angle de tir vaut 60°, quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile[1] ? Pourquoi ?
   c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue[2] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?
   d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.
   e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?

Problèmes élémentaires précédents (listes 1, 2, 3)

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

---

[1](On suppose $g = 10\ m/s^2$.)
[2]la portée

5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
8. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.
9. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
   a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
   b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.
   c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.
   d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.