
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

LISTE TYPE NUMÉRO 6

RÉPÉTITION 6

Préambule

Cette liste concerne

- les décompositions en fractions simples (utilisées notamment pour la primitivation et le calcul intégral)
- et toujours ... les fonctions élémentaires et la manipulation de leurs valeurs et propriétés standards
- les limites des valeurs des fonctions

I. Décomposition en fractions simples (suite)

1. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$\frac{x^2}{2x+1}, \quad \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^3}{x^3-1}$$

II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. Simplifier les expressions suivantes au maximum

$$\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)^2\right), \quad \operatorname{tg}(\ln(e^\pi/3)), \quad \exp(2\ln(2e)),$$
$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right), \quad \operatorname{arctg}(\sqrt{3}), \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\pi)), \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1)), \quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

III. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

1. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résume » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

2. Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement par exemple les quelques limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

3. Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1-x|}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x + \pi|)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2+1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$$



1, 2, 3...Sciences
Année académique 2010-2011

Problèmes élémentaires

Pour la répétition de mathématique de la semaine 9 : rédiger au net une résolution des problèmes ci-dessous

1. Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30%. Mais ensuite, ce sera la période des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30%. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour déboursier le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?
2. a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps A se déplace le long d'une courbe décrite par*

$$\{(2 \cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ .

b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Problèmes élémentaires précédents (listes 1, 2, 3, 4, 5)

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les $\frac{3}{20}$ de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est 1,032 ?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O , on place un triangle OAB , rectangle en A , de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.
Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\,500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?

6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
8. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse \mathcal{E} par son équation cartésienne

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

9. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées $(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

- a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
 - b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c .
 - c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p . Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p .
 - d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e .
10. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O , le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y . Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.

- a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.
- b) Si la norme de la vitesse initiale vaut 20 m/s et si l'angle de tir vaut 60° , quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile¹ ? Pourquoi ?
- c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue² par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?
- d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.
- e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?

¹(On suppose $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

²la portée