1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 7
Répétition 7 (semaine 8)

Version 28 octobre 2010 (V1 26/10/09)

Préambule

Cette liste concerne les limites et la dérivation des fonctions (et des applications)

Ces notions et leurs propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

En voici un exemple élémentaire. La loi de chute libre des corps (mise en évidence déjà par Galileo Galilei, 1564-1642, à la fin du XVIeme siècle) affirme que lorsqu'on lâche un corps près de la surface de la Terre, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps durant lequel on le laisse tomber. Si on néglige la résistance de l'air, la distance y est donnée par $y = 16\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en pieds, et par $y = 4,9\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en mètres [1]. Ainsi, la vitesse moyenne pendant les deux premières secondes est

$$\frac{16.2^2 - 16.0^2}{2} = 32 \text{ pieds par seconde}$$

et la vitesse moyenne entre la première et la deuxième seconde est

$$\frac{16.2^2 - 16.1^2}{1} = 48 \text{ pieds par seconde}$$

Si on s'intéresse plutôt à la vitese « instantanée » au temps t_0, on est amené à calculer les quotients

$$\frac{16.(t_0 + h)^2 - 16.t_0^2}{h}$$

pour des valeurs de h de plus en plus petites. Cela conduit bien sûr à la notion de *dérivée* de la fonction $t \mapsto y(t)$ en t_0...

0. Limites (exercices provenant de la liste précédente)

1. Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement par exemple les quelques limites suivantes

$$\lim_{x \to -\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

2. Calculer (si possible) les limites suivantes, ***sans appliquer le théorème de l'Hospital***

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 1} \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{|1 - x|}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty}(-x^2 + 2x) \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 2x}{2x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)} \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln(|x + \pi|)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \lim_{x \to +\infty} (\ln(x + 1) - \ln x)$$

I. Continuité et dérivation

1. a) On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$\sqrt[3]{3x^4 + 1} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + x}} \qquad \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \qquad \operatorname{arctg}(\sin x) \qquad \sqrt{\cos 2x} \qquad \sin(\operatorname{tg} x)$$

$$e^{\arcsin x} \qquad e^{e^x} \qquad \ln(x^2) \qquad \ln(x^2 - x - 2) \qquad (\ln(3))^x \qquad x|x|$$

b) Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.

1. attention donc aux lois trouvées dans diverses références ! Prendre garde aux unités de mesure, au SI, etc

$\boxed{\textbf{II. Divers}}$

1. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.
2. Représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 suivantes

$$f_1(x) = \frac{x - x^2 + 1}{1 - x}, \quad f_2(x) = xe^{-x}.$$

Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Problèmes élémentaires

Pour la répétition de mathématique de la semaine 10 : rédiger au net une résolution des problèmes ci-dessous

1. Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à dix mètres ?
2. Une population de bactéries est attaquée par un agent extérieur faisant en sorte qu'à chaque instant, le taux de changement de la population soit proportionnel à celle-ci. Si on suppose que la constante de proportionnalité est égale à -0.028,
   - écrire une équation reliant la population et le taux de changement de celle-ci à chaque instant
   - que vaut le taux de changement après une minute si la population à ce moment est de 3 millions d'individus ?

Problèmes élémentaires précédents (listes 1, 2, 3, 4, 5, 6)

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La ≪ promenade ≫ couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?

8. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

9. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

où a, b sont des nombres réels tels que $0<b<a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.
c) On appelle ≪ aphélie ≫ le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et ≪ périhélie ≫ le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.
d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.

10. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t)=v_1 t \\ y(t)=v_2 t-\frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.
b) Si la norme de la vitesse initiale vaut 20 m/s et si l'angle de tir vaut $60°$, quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile [2] ? Pourquoi ?
c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue [3] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?
d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.
e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?

11. Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30%. Mais ensuite, ce sera la période des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30%. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour débourser le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?

12. a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps A se déplace le long d'une courbe décrite par*

$$\{(2\cos\theta, \sin\theta):\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ.
b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.

2. (On suppose $g=10\ m/s^2$.)
3. la portée