
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUE
LISTE TYPE NUMÉRO 12
DIVERS

Exercices récapitulatifs.

Exercices à résoudre

1. (a) Résoudre les équations et inéquation suivantes (pour (ii), (iii), on suppose que $x \in [0, 2\pi]$)

$$(i) x|x^2 - 1| \leq |x - 1|, \quad (ii) \sin x \cos x = 1, \quad (iii) 4 \sin x \cos x = 1.$$

(b) Simplifier au maximum l'expression suivante : $\sin(\ln e^{\pi/3}) + \cos(\operatorname{tg}(5\pi/4))$

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|1 - x|}.$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x/2} \, dx.$$

4. Représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2 \leq 1 - 4x^2 \right\}$$

5. (i) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle

$$e^x Df(x) - f(x) = 0.$$

- (ii) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = 1 + e^{-x/3}$$

6. Les courbes de croissance de population du modèle de Gompertz sont les représentations de fonctions exponentielles du type

$$f(t) = e^{be^{ct}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où b, c sont des paramètres réels strictement négatifs.

- Déterminer la dérivée seconde de f .
- Quelle(s) valeur(s) doit-on donner à b pour que la dérivée seconde de f s'annule en $t = 0$?
- Pour $b = c = -2$, déterminer la limite des valeurs de f aux extrémités de son domaine de définition.

7. Soit t un nombre réel.

- Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe

$$e^{(i + 1/2)t}$$

- Ecrire la somme suivante sous la forme du sinus d'un réel

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3t) + \frac{1}{2} \sin(3t)$$

8. Déterminer la valeur du terme indépendant de x dans l'expression suivante

$$\left(x^2 - \frac{1}{x} \right)^{2011}$$

Problème élémentaire

Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

QCM

1. La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x|x| - 1$ est
 - 1) paire
 - 2) impaire
 - 3) croissante
 - 4) décroissante
 - 5) aucune des réponses précédentes n'est correcte
2. Si on double la longueur de l'arête d'un cube, l'aire totale des faces de ce cube est
 - 1) multipliée par 2
 - 2) multipliée par 4
 - 3) multipliée par 6
 - 4) multipliée par 8
 - 5) aucune des réponses précédentes n'est correcte