1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Application du calcul matriciel à la géométrie analytique
1er bachelier Chimie, Géographie, Physique : solutions

Version 11 mai 2011 (V1 : 02/03/2011)

Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes :
1) $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 10x - 26y - 59 = 0$
2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 4y + 2 = 0$
3) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

a) En précisant le changement de repère orthonormé effectué, réduire les équations suivantes pour obtenir une équation canonique.

1) Le changement de repère

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

transforme l'équation $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 10x - 26y - 59 = 0$ en l'équation réduite $4x'^2 + 9y'^2 = 36$.

2) Le changement de repère

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

transforme l'équation $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 4y + 2 = 0$ en l'équation réduite $x'^2 - 4y'^2 = 1$.

3) Le changement de repère

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

transforme l'équation $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ en l'équation réduite $x'^2 - \sqrt{2}y' = 0$.

b) Dans le repère initial, donner
- les coordonnées du centre éventuel de la conique et de son (ses) sommet(s)
- les équations cartésiennes de son (ses) axe(s) de symétrie et de ses éventuelles asymptotes.

1) Les axes de symétrie ont pour équations cartésiennes $x - y + 1 = 0$ et $x + y - 1 = 0$. Le centre a pour coordonnées $(0, 1)$ et les sommets ont pour coordonées

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2}\right), \quad (\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}).$$

2) Les axes de symétrie ont pour équations cartésiennes $x - y + 2 = 0$ et $x + y - 1 = 0$. Le centre a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et les sommets ont pour coordonées

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}, \frac{3 - \sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right).$$

Les asymptotes ont pour équations cartésiennes $x + 3y - 4 = 0$ et $3x + y = 0$.

3) L'axe de symétrie a pour équation cartésienne $x + y = 0$ et le sommet a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.