1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Corrigé de l'interrogation de math du 29 avril 2011

Version 28 avril 2011

Théorie

1. **(Toutes les sections.) Qu'appelle-t-on *matrice diagonale* ?**
2. **(Toutes les sections.) Qu'appelle-t-on *cofacteur* d'un élément d'une matrice carrée ?**
3. **(Toutes les sections.) Dans le cadre des résultats relatifs aux déterminants de matrices carrées, énoncer les deux lois appelées *Première loi des mineurs* et *Seconde loi des mineurs*.**
4. **Toutes les sections sauf les biologistes**
   - Soit A une matrice carrée qui admet un inverse. Quelle propriété possède alors son déterminant ? Justifier votre réponse.
   - La propriété énoncée au point précédent est-elle suffisante pour que A admette un inverse ? Justifier votre réponse.

Solution. Voir cours.

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

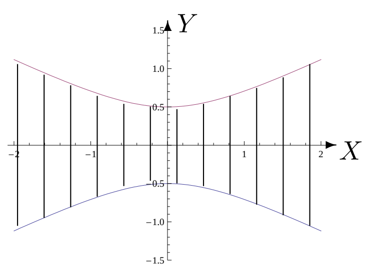
$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - 4y^2 + 1\right)$$

a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f. En donner une représentation graphique dans un repère orthonormé (hachurer ce domaine).
b) Déterminer l'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable.
c) Quelle est la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable au point de coordonnées $(1/2, -3/4)$?

Solution. a) Le domaine de dérivabilité est égal à

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 + 1 > 0\}.$$

La représentation graphique de cet ensemble est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de l'hyperbole étant exclus.



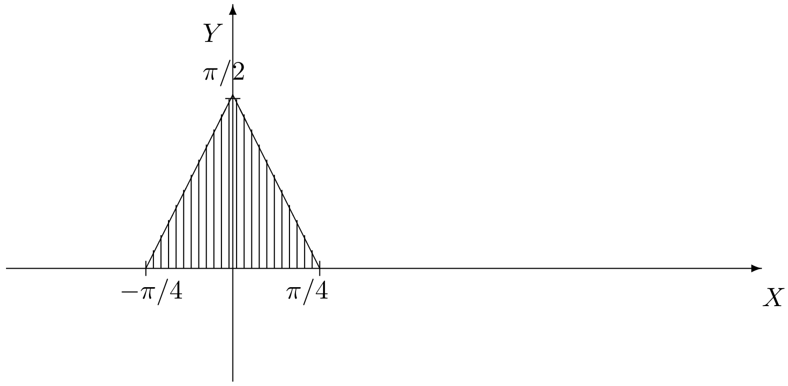
b) L'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable est la fonction donnée par

$$D_y f(x,y) = \frac{-8y}{x^2 - 4y^2 + 1}, \ (x,y) \in A.$$

c) Le point de coordonnées$(1/2, -3/4)$ n'appartient pas au domaine de dérivabilité ; on ne peut donc pas calculer la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable en ce point.

2. **On donne l'ensemble borné hachuré A suivant. Déterminer**

$$\int\int_A \sin(2x+y) \ dx \ dy.$$



Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto \sin(2x+y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble fermé borné ; dès lors, elle est intégrable sur A.
On a

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ x\in\left[\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right]\right\},$$

dès lors on doit calculer

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}}\sin(2x+y)\ dx\right)\ dy.$$

Comme on a

$$I_1=\int_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}}\sin(2x+y)\ dx=\left[-\frac{\cos(2x+y)}{2}\right]_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2y-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\sin(2y),$$

l'intégrale I vaut

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2y)\ dy=-\frac{1}{4}[\cos(2y)]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}(\cos(\pi)-\cos(0))=\frac{1}{2}.$$

3. **On donne l'ensemble A suivant**

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\leq x\leq y\leq x^2\right\}$$

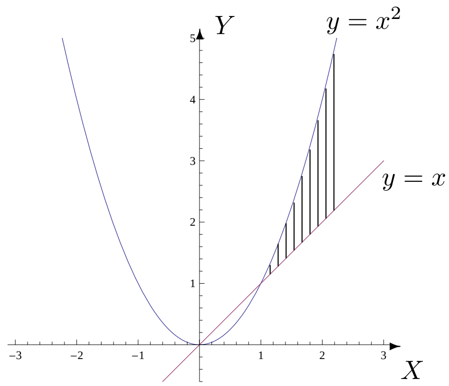
a) Représenter graphiquement cet ensemble dans un repère orthonormé en le hachurant.
b) Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction g suivante sur A et simplifier votre réponse au maximum

$$g(x,y)=xe^{-y}$$

Solution. a) L'ensemble A, fermé non borné et parallèle à X et à Y, est égal à

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,+\infty[,\ y\in[x,x^2]\}$$

et sa représentation graphique est la partie hachurée du plan, les points des « bords » étant compris dans l'ensemble.



b) Etudions l'intégrabilité de la fonction g continue et positive sur A.

Si x est fixé dans $[1, +\infty[$ alors la fonction g est continue sur le fermé borné $[x, x^2]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_x^{x^2} xe^{-y}\ dy = \left[-xe^{-y}\right]_{y=x}^{y=x^2} = -xe^{-x^2} + xe^{-x}.$$

Comme cette fonction est positive sur $[1, +\infty[$, en étudiant son intégrabilité par application de la définition, on aura, si la limite est finie, l'intégrabilité ainsi que la valeur de l'intégrale sur $[1, +\infty[$ et par conséquent celles de g sur A. Calculons

$$L = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \left(-xe^{-x^2} + xe^{-x}\right) dx.$$

On a

$$L = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{1}{2}\, e^{-x^2} - xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^t = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\, e^{-t^2} - te^{-t} - e^{-t} - \frac{1}{2}\, e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}\right) = \frac{3}{2e}.$$

Ainsi, g est intégrable sur A et son intégrale sur A vaut $\dfrac{3}{2e}$.

4. (Tous sauf les biologistes) **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \sqrt{1 + 2x^2}.$$

a) Où cette fonction est-elle deux fois dérivable ?
b) Si c'est possible, déterminer alors ses approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
c) Esquisser une représentation de f au voisinage de 0 dans un repère orthonormé.
d) Dans le même repère, représenter les approximations en utilisant différentes couleurs.

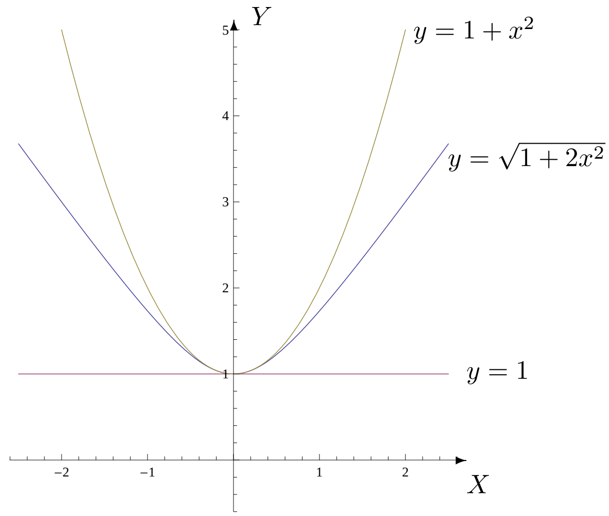
Solution. a) Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Ses dérivées première et seconde sont respectivement

$$Df(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 + 2x^2}} \qquad \text{et} \qquad D^2 f(x) = \frac{2}{\sqrt{(1 + 2x^2)^3}}$$

et on a $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0) = 2$.
Dès lors les approximations polynomiales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0 sont respectivement

$$P_1(x) = 1,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P_2(x) = 1 + x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

c) et d) Voici les représentations graphiques demandées



Y
$y = 1 + x^2$
$y = \sqrt{1 + 2x^2}$
$y = 1$
X
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2