
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUE, SECOND QUADRIMESTRE
LISTE TYPE NUMÉRO 1 BIS
1ER BACHELIER CHIMIE, GÉOGRAPHIE, PHYSIQUE : SOLUTIONS

Exercices

1. a) Soit $f : (x, y) \mapsto xy \sin(2y)$. Si possible, intégrer cette fonction sur l'ensemble $A = [0, 2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

La fonction f est continue sur le fermé borné A donc intégrable sur cet ensemble; son intégrale vaut $\frac{\pi - 1}{2}$.

- b) Soit $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$. Si possible, intégrer cette fonction sur l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

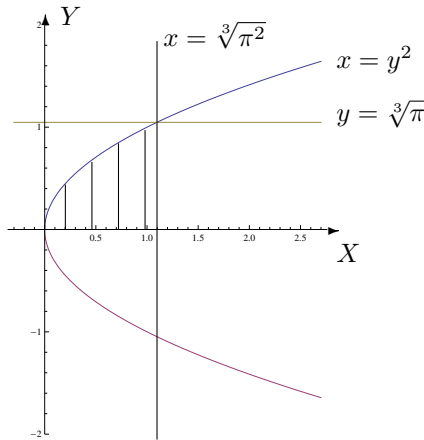
La fonction f est continue sur le fermé borné A donc intégrable sur cet ensemble; son intégrale vaut $\frac{19\pi}{6}$.

2. Soit

$$I = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3}) dx \right) dy.$$

- a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
 b) Si c'est possible, calculer l'intégrale.

a) L'ensemble d'intégration est l'ensemble des points hachurés dans la représentation ci-dessous, les points des bords étant compris dans l'ensemble.

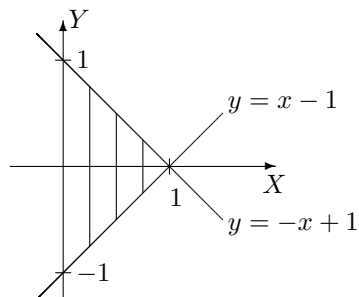


b) La fonction donnée est continue sur l'ensemble d'intégration qui est un ensemble fermé borné; elle est donc intégrable sur cet ensemble et son intégrale vaut 0.

3. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans le cas suivant :

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy \right) dx.$$

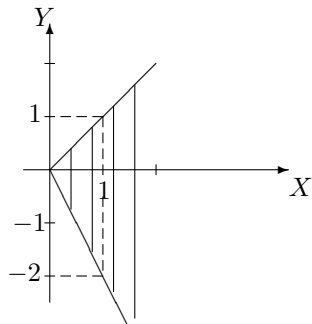
L'ensemble d'intégration est l'ensemble des points hachurés dans la représentation ci-dessous



et on a

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} f(x,y) dy \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{y+1} f(x,y) dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y) dx \right) dy$$

4. a) On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{-x^2}$ et l'ensemble fermé non borné A suivant.



Si possible, calculer $\int \int_A f(x, y) dx dy$.

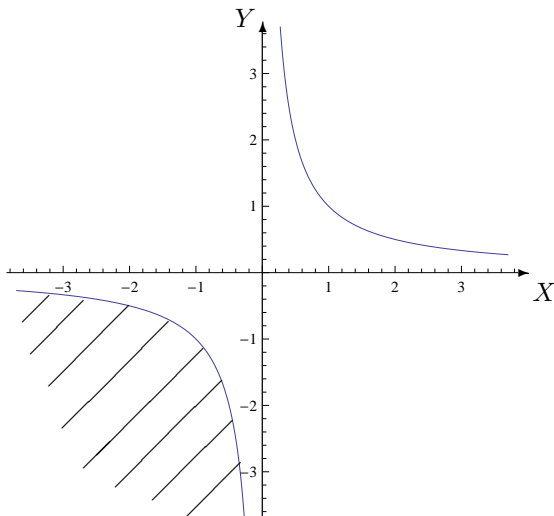
La fonction est intégrable sur l'ensemble non borné A et son intégrale vaut $\frac{3}{2}$.

b) On donne $f : (x, y) \mapsto x^9 e^{x^4 y}$ et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ et } 1 \leq xy\}$.

– Représenter l'ensemble A .

– Si possible, calculer $\int \int_A f(x, y) dx dy$.

L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points hachurés dans la représentation ci-dessous (les points du bord sont compris dans l'ensemble)



La fonction est intégrable sur l'ensemble non borné A et son intégrale vaut $-\frac{1}{3}$.