1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 2 : solutions

Version 14 février 2011 (V1 : 07/02/2010)

Calcul matriciel

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (1+i)^2 & \frac{1}{i} & (1-i)^3 \\ -1 & i^2 & 1+i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{i}{1-i} & 3 \\ -4i & -i \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iC,\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ B^*B,\ \widetilde{A}B,\ AB,\ C^2.$$

On ne peut calculer $A+B$ car ces matrices n'ont pas le même format. De même, il est impossible de calculer $\widetilde{A}B$ car le nombre de colonnes (3) de $\widetilde{A}$ est différent du nombre de lignes (2) de B. Sinon, on a

$$iC = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} & 3i \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (iB)^* = \begin{pmatrix} i & -3i \\ 0 & 2i \\ -i & -4i \end{pmatrix} \qquad A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} -1+2i & 2 \\ -i & -3 \\ -1-2i & 5+i \end{pmatrix}$$

$$B^*B = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 11 \\ -6 & 4 & -8 \\ 11 & -8 & 17 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} -3-2i & 2 & -4+2i \\ -3+i & 2 & -4-i \\ 5+5i & -2-2i & 2+2i \end{pmatrix} \quad C^2 = \begin{pmatrix} \frac{-25i}{2} & \frac{-3-3i}{2} \\ -2+2i & -1-12i \end{pmatrix}$$

2. **On donne la matrice** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. **Montrer que** $A^2+2A-3I=0$.

3. (**) **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice**

$$\text{a)} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c) avec } A \text{ et } B.$$

a) Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{C}$ commute avec la matrice A.

b) La matrice B étant multiple de la matrice identité, toute matrice commute avec elle.

c) Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{C}$ commute avec A et B.

4. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$\begin{pmatrix} (i-1)^2 & 1 \\ 2i & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le premier déterminant vaut $-8i$; le second vaut 8.

5. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$\begin{pmatrix} 2+x & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & -i \\ i & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 4x & -1 \end{pmatrix}.$$

Le premier déterminant se factorise sous la forme $x(x+3)$, le deuxième sous la forme $-(x-1)^2$ et le troisième sous la forme $(i-2x)(i+2x)$.

6. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\pi+\alpha) & \sin(\pi+\alpha) \\ \sin(\pi+\alpha) & -\cos(\pi+\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse de chacune des matrices données est respectivement la matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \frac{1-i}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ 1 & -i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice n'admet pas d'inverse car son déterminant est nul.

7. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes.**

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la première matrice sont 0 et $2i$; celles de la deuxième matrice sont -1 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).

8. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la première matrice sont 1 et 4 : cette matrice de dimension 2 possédant 2 valeurs propres distinctes est donc diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

si on note A la première matrice donnée.

La seule valeur propre triple de la deuxième matrice est 1. Les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre sont

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $c,\ c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice n'est pas diagonalisable puisqu'elle ne possède que deux vecteurs propres linéairement indépendants et non 3.

Les valeurs propres de la troisième matrice sont -1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double). Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 2 sont $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c,\ c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice de dimension 3 possédant 3 vecteurs propres linéairement indépendants est donc diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si on note B la troisième matrice donnée.

Divers

1. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

– **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
  On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

– **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et M'_θ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
  On a
$$M_\theta M'_\theta = M'_\theta M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$
  ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

– **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice qui représente une rotation.
On a
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$
C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

2. *Doudou le hamster.*
Doudou le hamster paresseux ne connaît que 3 endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou !
- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant ; il a donc 80 % de chance de retourner dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué

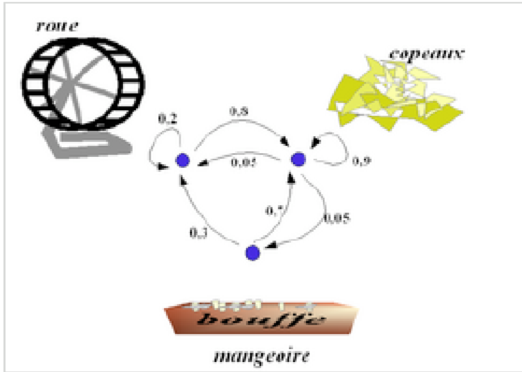
– **Représenter la matrice de transition de ce système**
  Si on note C_0, M_0, R_0 l'activité au départ (copeaux, mangeoire, roue) et C_1, M_1, R_1 l'activité suivante après une minute, on a

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ M_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ M_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

– **Prenons l'hypothèse que Doudou dort lors de la première minute de l'étude. Après deux minutes, quel pourcentage de chance a-t-on que Doudou dorme encore ? (resp. que Doudou mange ? , que Doudou coure ?)**

  Si Doudou dort lors de la première minute de l'étude alors après deux minutes, il dort dans 88,5 % des cas, il mange dans 4,5 % des cas et il court dans 7 % des cas.

– (**) **Avec ce modèle, à long terme, combien de temps pourra-t-on dire que Doudou a passé à dormir ?**



exemple avec boucles dessinées

Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 étant égal à

$$\begin{pmatrix} \frac{160}{181} \\ \frac{8}{181} \\ \frac{13}{181} \end{pmatrix},$$

on peut affirmer qu'à long terme Doudou passe plus de 88 % de son temps à dormir.