1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 3 : solutions

Version 21 février 2011 (V1 : 02/03/2010)

Exercices

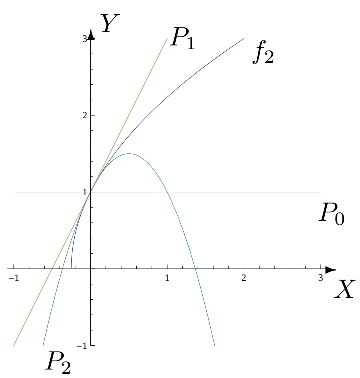
1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

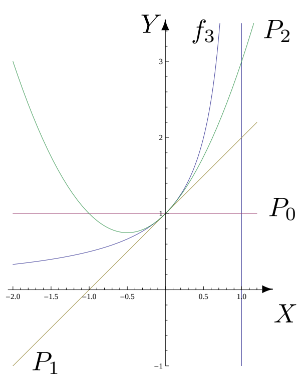
$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \sin x\ e^{2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 & f_2(x) = \sqrt{1+4x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2 & f_4(x) = \text{arcotg } x,\ x_0 = 0, n = 0,1,2 \\ f_5(x) = \sin^2 x,\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2 & f_6(x) = \cos x,\ x_0 = 1, n = 0,1,2 \end{array}$$

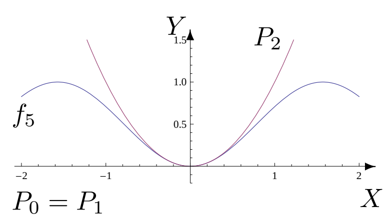
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	0	x	$x + 2x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1 + 2x$	$1 + 2x - 2x^2,\ x \in \left]-\frac{1}{4}, +\infty\right[$
f_3	1	$1 + x$	$1 + x + x^2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
f_4	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} - x,\ x \in \mathbb{R}$
f_5	0	0	$x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1) - \sin(1)(x-1)$	$\cos(1) - \sin(1)(x-1) - \cos(1)\frac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = x + 2x^2 + \dfrac{11x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

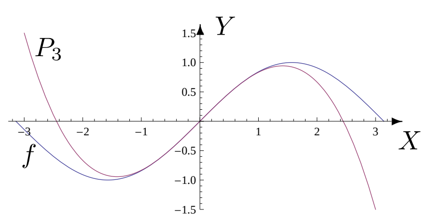






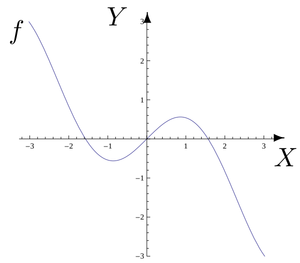
2. **a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction** sin **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est $P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\sin(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}$.

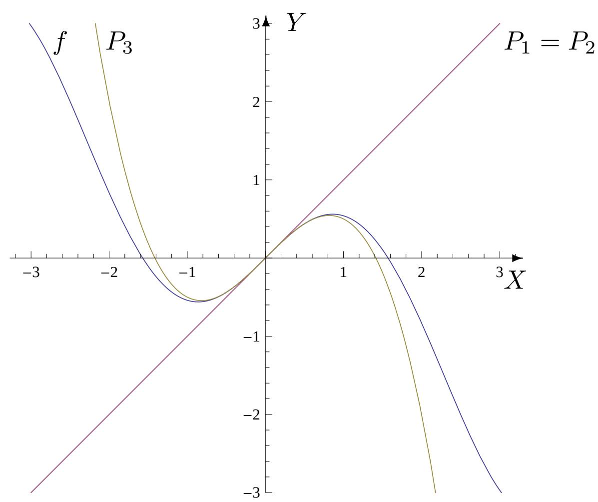


b) (*) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction $f(x) = x\cos x,\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion : $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.)



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = P_2(x) = x$ et $P_3(x) = x - \frac{x^3}{2},\ x \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de zéro, le graphique de f est
1) au-dessus de celui de $P_1 = P_2$ à gauche de 0 et en dessous à droite de 0
2) en dessous de celui de P_3 à gauche de 0 et au-dessus de celui de P_3 à droite de 0.



3. **(**) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par** [1]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = -2x,\ P_2(x) = -2x,\ P_3(x) = -2x - \frac{2x^3}{3},\ x \in]-1, 1[.$$

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = -2,\ P_1(x) = -2-x,\ P_2(x) = -2-x-5x^2,\ P_3(x) = -2-x-5x^2-7x^3,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}.$$

4. **(**) Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.**

L'approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

---

1. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples