
Université
de Liège



1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUE, SECOND QUADRIMESTRE
LISTE TYPE NUMÉRO 3 BIS : SOLUTIONS

Exercices

1. **Etudier la convergence de la suite q^m ($m \in \mathbb{N}_0$) en fonction de la valeur du paramètre réel q .**

Si $q = 1$, la suite converge vers 1.

Si $q = -1$, la suite diverge.

Si $|q| > 1$, la suite converge vers l'infini.

Si $|q| < 1$, la suite converge vers zéro.

2. **Les suites suivantes convergent-elles ? Si oui, quelle est leur limite ?**

$$x_m = \sum_{\zeta=3}^m \frac{1}{\zeta^2 - 4} \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq 3), \quad y_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j(j+1)} \quad (m \in \mathbb{N}_0), \quad z_m = \sum_{j=1}^m \frac{j}{m^2} \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

La suite x_m converge vers $\left(\frac{25}{48}\right)^-$, la suite y_m converge vers 1^- et la suite z_m converge vers $\left(\frac{1}{2}\right)^+$.

3. **Etudier la convergence des séries suivantes (signaler le critère des séries alternées)**

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2m)}{m^2}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{5m+1}}{m}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{4m}}{\sqrt{6m+9}}, \quad \sum_{m=4}^{+\infty} (\cos \sqrt{2})^m.$$

Toutes les séries, sauf la troisième, convergent.

4. **Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.**

$$\sum_{m=2}^{+\infty} (-3) \left(\frac{3}{2}\right)^m, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{-m} \frac{2^m}{3^{m+2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{n!}, \quad \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - 3m + 2}.$$

La première série diverge, la deuxième converge vers $\frac{1}{15}$, la troisième converge vers $e^4 - 1$ et la quatrième converge vers 1.

5. **Illustrer par un exemple le fait que si la série $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$ converge et si la série $\sum_{m=1}^{+\infty} |x_m|$ ne converge pas, alors on ne peut pas impunément grouper les termes de la première sans changer la limite.**

Exemple avec la série harmonique alternée : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \rightarrow \ln 2$ et

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

6. **Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculatrice etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de carte, des « vieux » moyens et de ses connaissances de base de « calculus ». Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millième.**

Comment peut-il procéder ?

Une mesure d'angle égale à 20 degrés correspond au réel $\frac{\pi}{9} < \frac{1}{2}$.

L'approximation polynomiale en 0 du cosinus donne

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \quad \text{avec} \quad |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $x = \frac{1}{2}$,

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifié si } n = 4.$$

Dès lors, une valeur approchée du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés est donnée par

$$P\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{4!} = 1 - \frac{\pi^2}{162} + \frac{\pi^4}{81^2 \cdot 24} \approx 0,9396951.$$