1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Préparation à l'interrogation : solutions

Version 24 mars 2011 (V1 : 22/03/2011)

Exercices

1. **Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = 1 - x^2 + 2xy$. Par application de la définition, prouver que f est dérivable par rapport à x en $(2, -3)$ et donner la valeur de la dérivée en ce point.**

   Comme la limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h, -3) - f(2, -3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 10h}{h} = -10$$
   existe et est finie, la fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point de coordonnées $(2, -3)$ et sa dérivée vaut -10.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[\times]-6, 11[$.**
   – **Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2 + 2)$**
   – **Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.**
   – **Si c'est possible, que vaut celle-ci en $\frac{\sqrt{2}}{2}$?**

   - Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble
$$\left\{t \in \mathbb{R} : -1 < 2t < 1,\ t+1 > 0,\ -\frac{\pi}{6} < \arcsin(2t) < \frac{\pi}{2},\ -6 < t^2 + 2 < 11\right\}$$
$$= \left\{t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2},\ t^2 - 9 < 0\right\} = \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[.$$

   - La dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g est donnée par
$$Df(t) = (D_x g)(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2{+}2)\ .\ D\arcsin(2t) + (D_y g)(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2{+}2)\ .\ D\frac{1}{\sqrt{t+1}}$$
$$+ (D_z g)(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2 + 2)\ .\ D(t^2 + 2)$$
$$= (D_x g)(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2{+}2)\ .\ \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_y g)(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2{+}2)\ .\ \frac{(-1)}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$
$$+ (D_z g)(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2 + 2)\ .\ 2t$$
   où x, y, z sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.

   - Il est impossible de calculer la dérivée de f en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ car ce réel n'appartient pas au domaine de dérivabilité de f.

3. **Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.**
   – **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de f.**
   – **Calculer $D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y)$.**

   - Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

   - D'une part, on a
$$D_x f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .\ \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad D_x^2 f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$
   D'autre part, on a
$$D_y f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad D_y^2 f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$
   Dès lors, $D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y) = 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4. **Soit** $g : (x,y) \mapsto g(x,y) = \sin(ax)\sin(by)$ **avec** $a, b \in \mathbb{R}_0$**. Si c'est possible, calculer l'expression** $D_x^2 g(x,y) - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 g(x,y)$**.**

   Le domaine d'infinie dérivabilité de g est l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

   -D'une part, on a

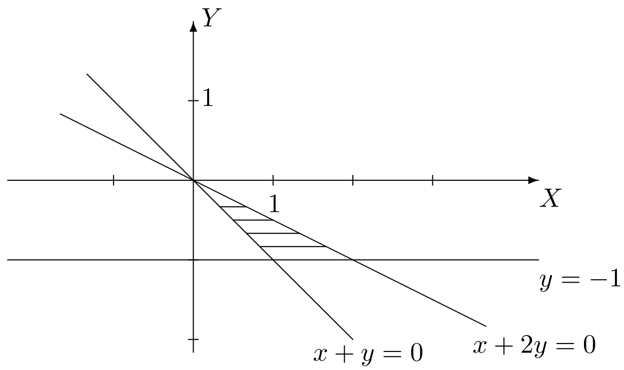
$$D_x g(x,y) = a\ \cos(ax)\sin(by) \quad \text{et} \quad D_x^2 g(x,y) = -a^2 \sin(ax)\sin(by).$$

   D'autre part, on a

$$D_y g(x,y) = b\ \sin(ax)\cos(by) \quad \text{et} \quad D_y^2 g(x,y) = -b^2 \sin(ax)\sin(by).$$

   Dès lors, $D_x^2 g(x,y) - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 g(x,y) = -a^2 \sin(ax)\sin(by) + a^2 \sin(ax)\sin(by) = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

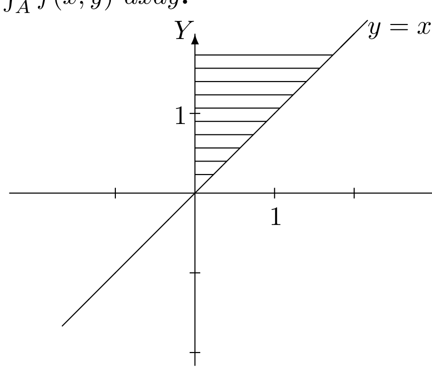
5. **On donne l'ensemble fermé A hachuré ci-dessous. Si c'est possible, calculer** $\int\int_A xy\ dxdy$**.**



   La fonction $f : (x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble A fermé borné ; elle est donc intégrable sur A et on a

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-y}^{-2y} xy\ dx \right)\ dy = \int_{-1}^{0} \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=-y}^{x=-2y}\ dy = \int_{-1}^{0} \frac{3y^3}{2}\ dy = \left[\frac{3y^4}{8} \right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{8}.$$

6. **On donne l'ensemble fermé non borné A hachuré ci-dessous et** $f(x,y) = e^{-y^2}$**. Si c'est possible, calculer** $\int\int_A f(x,y)\ dxdy$**.**



   La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble A fermé non borné et on a $|f(x,y)| = f(x,y),\ (x,y) \in A$.

Comme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [0,y]\}$, si y est fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-y^2}$ est continue sur le fermé borné $[0,y]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^y e^{-y^2}\ dx = ye^{-y^2}.$$

Etudions l'intégrabilité de $y \mapsto ye^{-y^2}$ en $+\infty$ et pour cela voyons si la limite

$$L = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t ye^{-y^2}\ dy$$

est finie. On a

$$L = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_0^t = -\frac{1}{2} \lim_{t \to +\infty} (e^{-t^2} - 1) = \frac{1}{2}.$$

Comme la limite est finie, la fonction f est intégrable sur A et $\int\int_A\ f(x,y)\ dxdy = \frac{1}{2}$ puisque f est une fonction positive sur A.

7. **Si c'est possible, calculer**

$$I = \int_{-1}^0 \left(\int_{-x}^1 \sin(y^2)\ dy \right) dx.$$

La fonction $(x,y) \mapsto \sin(y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [-y,0]\}$$

ensemble fermé borné. La fonction est donc intégrable sur A et on a

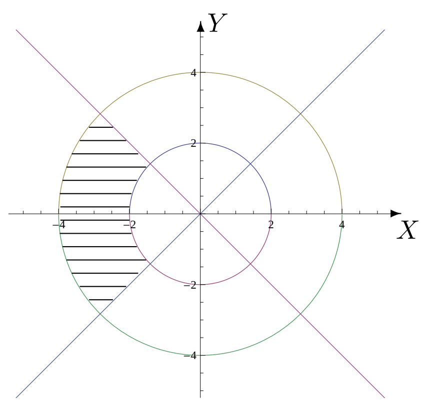
$$I = \int_0^1 \left(\int_{-y}^0 \sin(y^2)\ dx \right)\ dy = \int_0^1 y\sin(y^2)\ dy = \left[-\frac{1}{2}\cos(y^2) \right]_0^1 = \frac{1-\cos 1}{2}.$$

8. **Si c'est possible, calculer l'intégrale de**

$$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

sur l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq 4 - y^2,\ y^2 \leq 16 - x^2,\ x \leq y \leq -x\}$**.**

La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc sur A ensemble haché ci-dessous fermé borné. Elle est donc intégrable sur A.



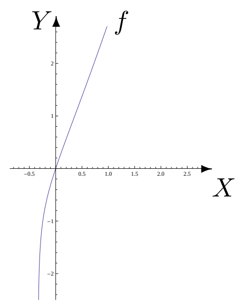
En passant aux coordonnées polaires, on a $f(r,\theta) = \dfrac{r\cos(\theta)}{(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta))^2} = \dfrac{\cos(\theta)}{r^3}$ et

$$\int\int_A\ f(x,y)\ dxdy = \int_2^4 \left(\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r\ .\ \frac{\cos(\theta)}{r^3} \right) dr = \left[-\frac{1}{r} \right]_2^4\ .\ \left[\sin(\theta) \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

9. **Déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0,1 et 2 en 0 de la fonction**

$$f(x) = (x+1)\ln(3x+1), \qquad x \in]-\frac{1}{3}, +\infty[.$$

Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté ci-dessous.

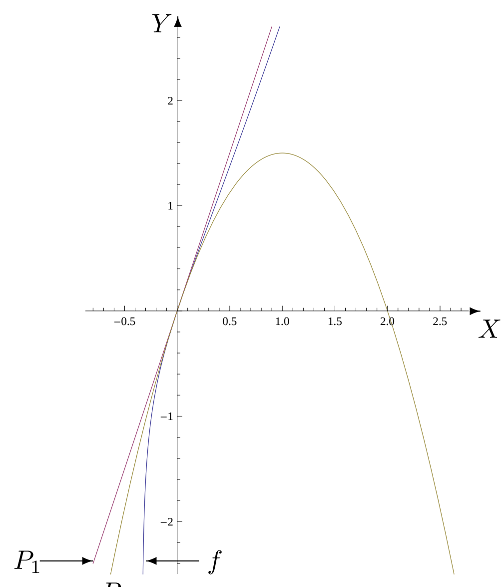


La fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln(3x+1)$ est infiniment dérivable sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$.
Comme $Df(x) = \ln(3x+1) + \dfrac{3x+3}{3x+1}$ et $D^2 f(x) = \dfrac{9x-3}{(3x+1)^2}$, on a

$$f0) = 0, \; Df(0) = 3 \quad \text{et} \quad D^2 f(0) = -3.$$

Si $P_n(x)$ est l'approximation polynomiale à l'ordre n de f en 0, alors les approximations à l'ordre 0, 1 et 2 sont respectivement égales à

$$P_0(x) = 0, \; P_1(x) = 3x \quad \text{et} \quad P_2(x) = 3x - \frac{3x^2}{2}, \; x \in \mathbb{R}.$$



10. **La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression**

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\mathbf{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est la constante de gravitation.

– **Sachant que th** : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.**

- **Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon le mois dernier avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?**

- La fonction th : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est

$$D\ \mathrm{th}(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Comme $\mathrm{th}(0) = 0$ et $D\ \mathrm{th}(0) = 1$, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction est le polynôme $P(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 5$ km $= 5\ 000$ m et $h = 2$ m alors la valeur de $\dfrac{2\pi h}{\lambda}$ est proche de 0 et en utilisant l'approximation ci-dessus, on a

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

Ainsi, la vitesse de la vague du tsunami lors de son arrivée près des côtes était $\sqrt{2 \cdot 9,81} = 4,429$ m/s.