1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste de révision sur les fonctions de plusieurs variables : solutions

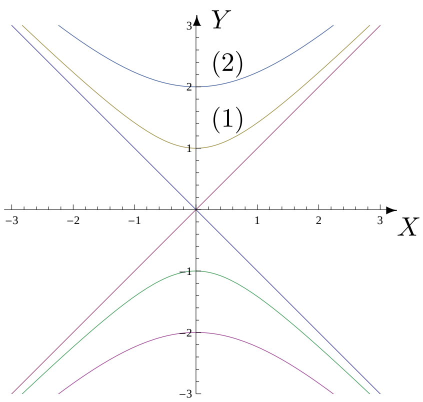
Version 5 mai 2011 (V1 : 05/04/2011)

Exercices

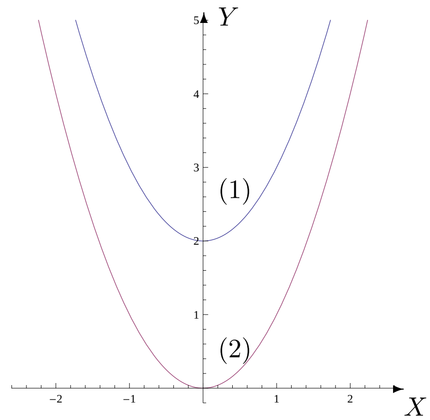
1. **Dans chacun des cas suivants, représenter dans un repère orthonormé les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si**

   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ **avec** $c = -1$ **et** -4 **b)** $f(x,y) = x^2 - y$ **avec** $c = -2$ **et** 0

   a) Représentons les courbes d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = -1$ (1) et $x^2 - y^2 = -4$ (2).



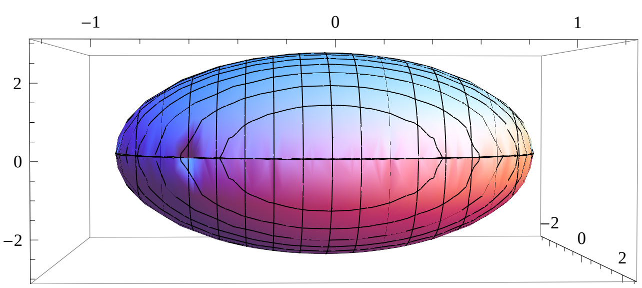
   b) Représentons les courbes d'équation cartésienne $x^2 - y = -2$ (1) et $x^2 - y = 0$ (2).



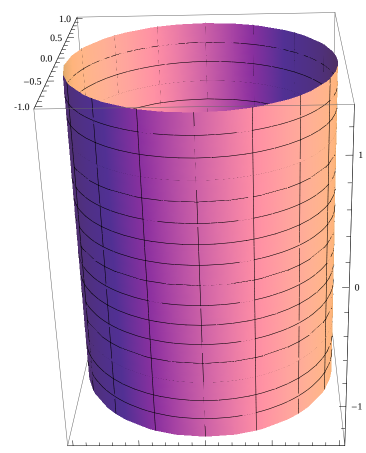
2. **Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter graphiquement les surfaces dont voici l'équation cartésienne**

   a) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$ **b)** $x^2 + y^2 = 1$

   a)



   b)



3. **Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que les dérivées partielles de** $f : (x,y) \mapsto \sin\left(\dfrac{3x}{2-y}\right)$**.**

   Le domaine de dérivabilité de f est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2\}$.
   La dérivée partielle de f par rapport à sa première variable est $D_x f(x,y) = \dfrac{3}{2-y} \cos\left(\dfrac{3x}{2-y}\right)$ et par rapport à sa seconde variable est $D_y f(x,y) = \dfrac{3x}{(2-y)^2} \cos\left(\dfrac{3x}{2-y}\right)$.

4. **Soient** $f : (x,y) \mapsto \arcsin(\sqrt{1 - x^2y^2})$ **et** $g : (x,y) \mapsto \arcsin(xy)$**.**
   a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de ces fonctions et représenter

ces domaines graphiquement.

Pour f, le domaine de définition est

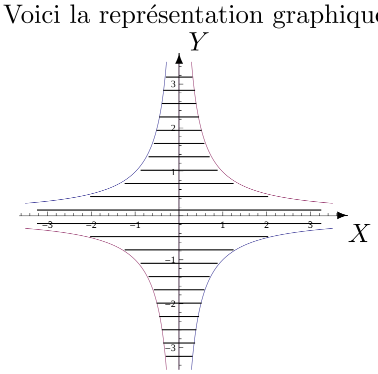
$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2y^2 \geq 0, -1 \leq \sqrt{1-x^2y^2} \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2y^2 \leq 1\}$$

et le domaine de dérivabilité est

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2y^2 > 0, -1 < \sqrt{1-x^2y^2} < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2y^2 < 1\}$$

Pour g, le domaine de définition est $\mathrm{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$ et le domaine de dérivabilité est $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\}$.

Voici la représentation graphique de ces différents domaines :



Le domaine de définition de f est l'ensemble des points de la partie hachurée du plan, les points des hyperboles étant compris dans l'ensemble ; pour A, on exclut de cet ensemble les points des hyperboles et ceux des axes.
Les domaines de définition de f et g sont égaux ; pour B, on exclut seulement les points des hyperboles.

b) Calculer les dérivées partielles de ces fonctions.

Les dérivées partielles de f sont les suivantes :

$$D_x f(x,y) = \begin{cases} -\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} & \text{si} \quad xy > 0 \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D_y f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} & \text{si} \quad xy > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}.$$

Les dérivées partielles de g sont

$$D_x g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} \quad \text{et} \quad D_y g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

c) Vu les items a) et b), comparer ces fonctions ?

Dans la partie commune de leur domaine de dérivabilité, ces fonctions ont mêmes dérivées partielles dans le deuxième et le quatrième quadrant et des dérivées partielles opposées dans le deux autres quadrants.

5. **Montrer que**
a) la fonction $f : (x,y) \mapsto e^x \sin(y)$ vérifie l'équation $D_x^2 f + D_y^2 f = 0$.

La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a $D_x^2 f(x,y) = e^x \sin(y)$ et $D_y^2 f(x,y) = -e^x \sin(y)$. Dès lors, on a bien $D_x^2 f + D_y^2 f = 0$.

b) la fonction $g : (x,y) \mapsto \sin^2(x)\cos(y)$ vérifie l'équation $D_x D_y g = D_y D_x g$.

La fonction g est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a $D_x g(x,y) = 2\sin(x)\cos(x)\cos(y)$, $D_y g(x,y) = -\sin^2(x)\sin(y)$ et $D_x D_y g(x,y) = D_y D_x g(x,y) = -2\sin(x)\cos(x)\sin(y)$.

6. **Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires et on a $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que**

$$(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(D_\theta F)^2.$$

La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ et on a

$$D_r F(r,\theta) = (D_x f)(x,y)\ \cos(\theta) + (D_y f)(x,y)\ \sin(\theta)$$

et

$$D_\theta F(r,\theta) = (D_x f)(x,y)\ (-r\sin(\theta)) + (D_y f)(x,y)\ (r\cos(\theta))$$

avec $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Dès lors, on a bien l'égalité annoncée.

7. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes après avoir représenté graphiquement l'ensemble A d'intégration**

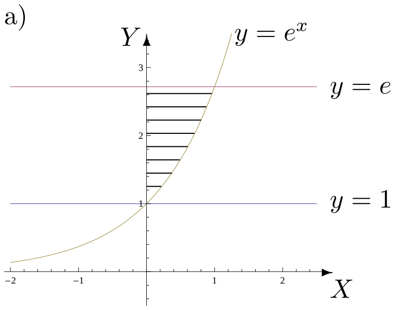
$$a) \int_1^e \left(\int_0^{\ln(y)} e^x\ dx \right)\ dy \qquad\qquad b) \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y^2)}\ dx \right)\ dy$$

$$c) \int\int_A x\sqrt{4y^2 - x^2}\ dx\ dy \quad \textbf{si} \quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y \in \left[-1, -\frac{x}{2}\right]\right\}$$

$$d) \int\int_A x^2 y\ e^{xy}\ dx\ dy \quad \textbf{si} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [0,2]\}$$

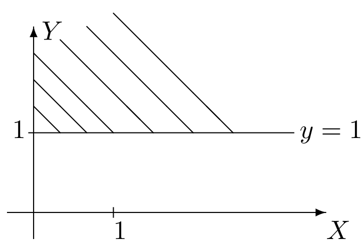
$$e) \int\int_A \frac{1}{x}\ dx\ dy \quad \textbf{si} \quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

a)



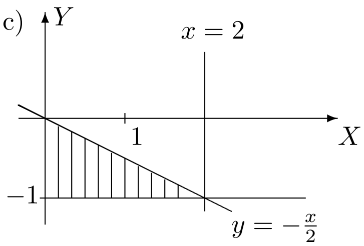
La fonction $f : (x,y) \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc aussi sur A, ensemble fermé borné hachuré ci-contre. Elle est donc intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{(e-1)^2}{2}$.

b)



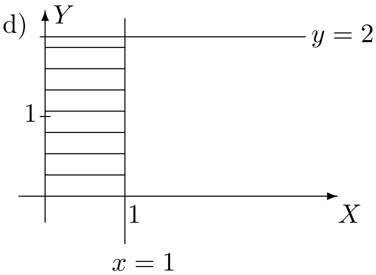
La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$ donc aussi sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [1,+\infty[\}$ ensemble non borné fermé hachuré ci-contre.
Pour étudier l'intégrabilité de la fonction, remarquons que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$. On montre que cette fonction est intégrable sur A et que son intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

c)



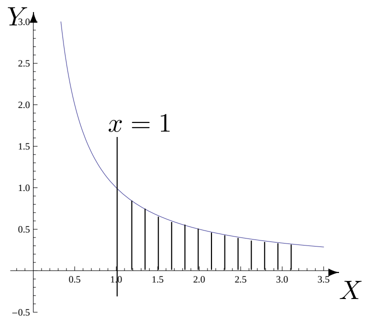
La fonction $f : (x,y) \mapsto x\sqrt{4y^2 - x^2}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - x^2 \geq 0\}$ donc aussi sur A, ensemble fermé borné hachuré ci-contre. Elle est donc intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2}{3}$.

d)



La fonction $f : (x,y) \mapsto \; x^2y\ e^{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc aussi sur A, ensemble fermé borné hachuré ci-contre. Elle est donc intégrable sur A et son intégrale vaut 2.

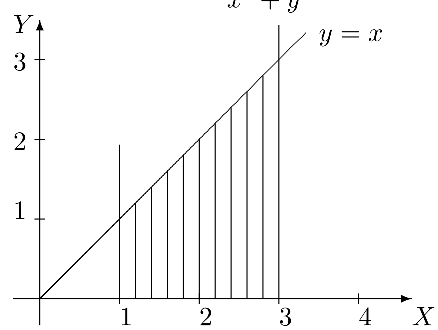
e)



La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ donc aussi sur A, ensemble non borné fermé hachuré ci-contre. Pour étudier l'intégrabilité de la fonction, remarquons que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$. On montre que cette fonction est intégrable sur A et que son intégrale vaut 1.

8. **Calculer l'aire de la partie hachurée A puis l'intégrale sur A de la fonction f si**

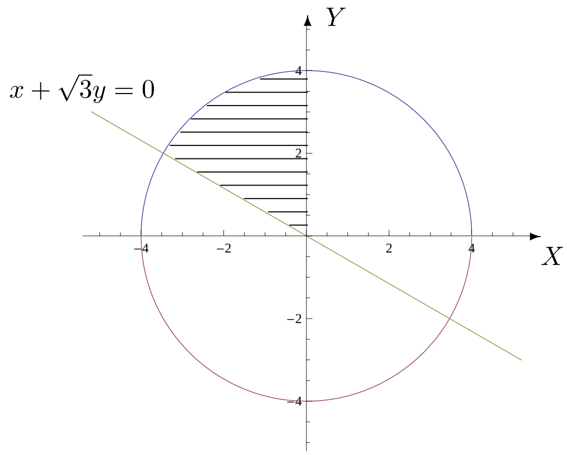
   a) A est représenté ci-dessous et $f : (x,y) \mapsto \dfrac{2}{x^2+y^2}$



L'aire s'obtient en calculant $\int_1^3 x\ dx = 4$, la fonction $x \mapsto x$ étant intégrable sur l'intervalle fermé borné $[1,3]$ puisque continue sur $\mathbb{R}$ donc sur cet intervalle.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc sur A, ensemble fermé borné. Elle est donc intégrable sur A et l'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2} \ln 3$.

b) A est représenté ci-dessous et $f : (x,y) \mapsto x^2$.



En passant aux coordonnées polaires, l'aire s'obtient en calculant

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} r \ d\theta \right) \ dr = \frac{8\pi}{3}$$

la fonction $(x,y) \mapsto 1$ étant intégrable sur l'ensemble A fermé borné puisque continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble fermé borné. Elle est donc intégrable sur A et l'intégrale vaut $\dfrac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}$.