1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Mathématiques générales 2010-2011 : Test 4

Test du 18/03/2011 : 1er bachelier biologie

1. **a) Si f est une fonction continûment dérivable sur $]0,1[\times]3,+\infty[$, où la fonction définie par $g(t)=f(\ln t, t^2-1)$ est-elle dérivable ?**
b) Déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Solution.
a) Le domaine de dérivabilité de cette fonction est l'ensemble A égal à

$\{t\in\mathbb{R} : t>0,\ 0<\ln t<1,\ t^2-1>3\} = \{t\in\mathbb{R} : t>0,\ 1<t<e,\ t<-2 \text{ ou } t>2\} =]2,e[$

b) Sa dérivée est donnée par

$$Dg(t) = (D_xf)(\ln t, t^2-1)\ .\ \frac{1}{t} + (D_yf)(\ln t, t^2-1)\ .\ 2t,\ \ t\in A$$

où x et y sont respectivement la première et la seconde variable de f.

2. **On donne la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=1-x^2-y^2$ et l'ensemble $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$.**
a) Représenter l'ensemble A.
b) Si c'est possible, calculer $\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$.

Solution.
a) A est l'ensemble des points intérieurs au cercle centré à l'origine d'un repère orthonormé et de rayon 2, les points du cercle étant compris dans l'ensemble.

b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur A ensemble fermé borné donc intégrable sur cet ensemble. En travaillant en coordonnées polaires, on a

$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = 1-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1-r^2$ et $A=\{(r,\theta) : r\in]0,2],\ \theta\in[0,2\pi]\}$.

Dès lors, comme le jacobien vaut r, on a

$$I=\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}(1-r^2)r\ d\theta\right)\ dr = 2\pi\int_0^2(r-r^3)\ dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(2-4) = -4\pi.$$

Test du 15/03/2011 : 1er bachelier chimie

1. **On donne f continûment dérivable sur $]0,3[\times]-1,+\infty[$ et on définit $F(t) = f(4-t^2, t^2-1)$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de F.
   b) Si $D_x f(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}) = 2$ et $D_y f(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}) = -3$, que vaut $DF(\frac{3}{2})$?

   Solution.
   a) Le domaine de dérivabilité de cette fonction est l'ensemble A égal à

   $\{t \in \mathbb{R} : 0 < 4-t^2 < 3,\ t^2-1 > -1\} = \{t \in \mathbb{R} : 4-t^2 > 0,\ 1-t^2 < 0,\ t^2 > 0\} =]-2,-1[\cup]1,2[$

   b) Sa dérivée est donnée par

   $$DF(t) = (D_x f)(4-t^2, t^2-1)\ .\ (-2t) + (D_y f)(4-t^2, t^2-1)\ .\ 2t,\ t \in A$$

   où x et y sont respectivement la première et la seconde variable de f.
   Dès lors, on a

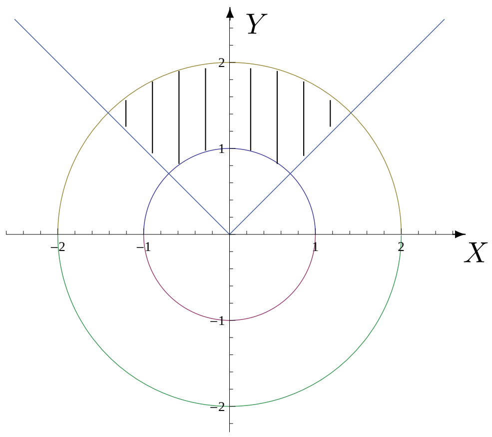
   $$DF\left(\frac{3}{2}\right) = (D_x f)\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)\ .\ (-3) + (D_y f)\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)\ .\ 3 = 2\ .(-3) + (-3)\ .\ 3 = -15.$$

2. **On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + y^2$ et l'ensemble**

   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

   a) Représenter l'ensemble A
   b) Si c'est possible, calculer $\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$.

   Solution.
   a) A est l'ensemble des points hachurés, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



   b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur A ensemble fermé borné donc intégrable sur cet ensemble. En travaillant en coordonnées polaires, on a

   $$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \text{ et } A = \{(r,\theta) : r \in [1,2],\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\}.$$

   Dès lors, comme le jacobien vaut r, on a

   $$I = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^3\ d\theta\right)\ dr = \frac{\pi}{2}\int_1^2 r^3\ dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{8}.$$

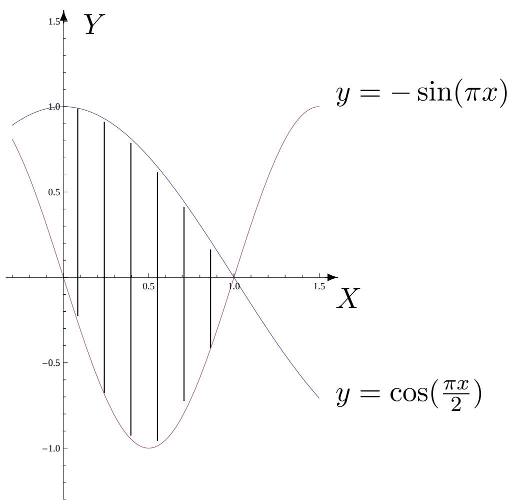
Test du 14/03/2011 : 1er bachelier géographie

1. **On donne f continûment dérivable sur $]0,8[\times]-1,+\infty[$ et on définit $F(t) = f(9-t^2, t^2-1)$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de F.
   b) Si $D_xf(5,3) = -1$ et $D_yf(5,3) = 4$, que vaut $DF(2)$?

   Solution.
   a) Le domaine de dérivabilité de cette fonction est l'ensemble A égal à
   $$\{t \in \mathbb{R} : 0 < 9-t^2 < 8,\ t^2-1 > -1\} = \{t \in \mathbb{R} : 9-t^2 > 0,\ 1-t^2 < 0,\ t^2 > 0\} =]-3,-1[\cup]1,3[$$
   b) Sa dérivée est donnée par
   $$DF(t) = (D_xf)(9-t^2, t^2-1)\ .\ (-2t) + (D_yf)(9-t^2, t^2-1)\ .\ 2t,\ \ t \in A$$
   où x et y sont respectivement la première et la seconde variable de f.
   Dès lors, on a
   $$DF(2) = (D_xf)(5,3)\ .\ (-4) + (D_yf)(5,3)\ .\ 4 = (-1)\ .(-4) + 4\ .\ 4 = 20.$$

2. **On donne la fonction $f : (x,y) \mapsto x$ et l'ensemble**
   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sin(\pi x) \leq y \leq \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),\ \ x \in [0,1]\}.$$
   a) Représenter l'ensemble A
   b) Si c'est possible, calculer $\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$.

   Solution.
   a) A est l'ensemble des points hachurés, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



   b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur A ensemble fermé borné donc intégrable sur cet ensemble et on a
   $$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sin(\pi x)}^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} x\ dy\right)\ dx = \int_0^1 x\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin(\pi x)\right)\ dx.$$
   Par une intégration par partie, on obtient
   $$I = \left[x\left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right)\ dx$$
   $$= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_0^1 = \frac{3}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}.$$

Test du 17/03/2011 : 1er bachelier géologie

1. **a) Si f est une fonction continûment dérivable sur $]0,1[\times]1,+\infty[$, où la fonction définie par $g(t) = f(\ln t, t^2 - 3)$ est-elle dérivable ?**
   b) Déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

   Solution.
   a) Le domaine de dérivabilité de cette fonction est l'ensemble A égal à

   $\{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ 0 < \ln t < 1,\ t^2 - 3 > 1\} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ 1 < t < e,\ t < -2 \text{ ou } t > 2\} =]2, e[$

   b) Sa dérivée est donnée par

   $$Dg(t) = (D_x f)(\ln t, t^2 - 3)\ .\ \frac{1}{t} + (D_y f)(\ln t, t^2 - 3)\ .\ 2t,\ \ t \in A$$

   où x et y sont respectivement la première et la seconde variable de f.

2. **On donne la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ et l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.**
   a) Représenter l'ensemble A.
   b) Si c'est possible, calculer $\int\int_A f(x, y)\ dx\ dy$.

   Solution.
   a) A est l'ensemble des points intérieurs au cercle centré à l'origine d'un repère orthonormé et de rayon 3, les points du cercle étant compris dans l'ensemble.

   b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, elle est continue sur A ensemble fermé borné donc intégrable sur cet ensemble. En travaillant en coordonnées polaires, on a

   $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = 1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1 - r^2$ et $A = \{(r, \theta) : r \in]0, 3],\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

   Dès lors, comme le jacobien vaut r, on a

   $$I = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} (1 - r^2) r\ d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^3 (r - r^3)\ dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 = 2\pi \left(\frac{9}{2} - \frac{81}{4} \right) = -\frac{63\pi}{2}.$$

Test du 18/03/2011 : 1er bachelier physique et informatique

1. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]0,\pi[\times]-\infty,0[$.**
   a) Où la fonction $F : t \mapsto f(\mathbf{arcos}(2t-1), \ln t^2)$ est-elle dérivable ?
   b) Déterminer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

   Solution.
   a) Le domaine de dérivabilité de cette fonction est l'ensemble A égal à

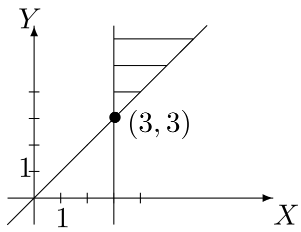
   $$\{t \in \mathbb{R} : -1 < 2t-1 < 1,\ t^2 > 0,\ 0 < \text{arcos}(2t-1) < \pi,\ \ln(t^2) < 0\}$$
   $$= \{t \in \mathbb{R} : 0 < 2t < 2,\ t^2 < 1\} =]0,1[$$

   b) Sa dérivée est donnée par

   $$DF(t) = (D_x f)(\text{arcos}(2t-1), \ln t^2)\ .\ \frac{-2}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} + (D_y f)(\text{arcos}(2t-1), \ln t^2)\ .\ \frac{2}{t},\ t \in A$$

   où x et y sont respectivement la première et la seconde variable de f.

2. **On donne la fonction**
   $$f : (x,y) \mapsto \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$
   et l'ensemble A fermé non borné hachuré suivant



   Si c'est possible, calculer $\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$.

   Solution.
   L'ensemble A est l'ensemble non borné $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [3,+\infty[,\ x \in [3,y]\}$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ l'est donc sur A et on a $|f(x,y)| = f(x,y)$ en tout point de A. Vérifions l'intégrabilité de f sur A par application de la définition.

   Si y est fixé dans $[3,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}$ est continue sur le fermé borné $[3,y]$ donc y est intégrable et on a

   $$\int_3^y \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2+y^2}\right]_{x=3}^{x=y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2+9} - \frac{1}{2y^2}\right).$$

   Voyons à présent si la limite

   $$\lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2+9} - \frac{1}{2y^2}\right)\ dy$$

   est finie. Si c'est le cas, la fonction f sera intégrable sur A et l'intégrale sera égale à la valeur de la limite. Pour cela, calculons

   $$I(t) = \frac{1}{2}\int_3^t \left(\frac{1}{y^2+9} - \frac{1}{2y^2}\right)\ dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + \frac{1}{2y}\right]_3^t = \frac{1}{6}\text{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{4t} - \frac{\pi}{24} - \frac{1}{12}$$

puis

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\text{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{4t} - \frac{\pi}{24} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{24} - \frac{1}{12} = \frac{\pi - 2}{24}.$$

La fonction est donc intégrable sur A et comme elle est positive en tout point de A, son intégrale vaut $\dfrac{\pi - 2}{24}$.