Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Mathématiques générales 2010-2011 : Test 5

Test du 28/03/2011 : 1er bachelier biologie

1. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Si une matrice carrée M est inversible, comment calcule-t-on son inverse ?
b) La matrice M donnée admet-elle un inverse ? Pourquoi ?
c) Si l'inverse existe, en déterminer son élément situé sur la 1ère ligne et la 2ème colonne.

Solution.

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{\mathcal{M}}$

b) Comme $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4(3 \,.\, 2 - 2 \,.(-1)) = 32 \neq 0$ si on applique la 1ère loi des mineurs à la 3ème ligne, la matrice M admet un inverse.
c) L'élément situé sur la 1ère ligne et la 2ème colonne de M^{-1} s'obtient en divisant le cofacteur de l'élément situé sur la 2ème ligne et la 1ère colonne de M par la valeur du déterminant de M. Dès lors, on a $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

2. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
b) Si M est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
c) A partir de l'éventuelle forme diagonale obtenue, effectuer une preuve en

utilisant le produit matriciel.

Solution.

a) Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc 1 et 3. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice M est diagonalisable.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre 1.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M-I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=y \end{cases}$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre 3.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M-3I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ -x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ y=y \end{cases}$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}MS = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $MS = S\Delta$. On a l'égalité puisque

$$MS = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$S\Delta = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Test du 07/04/2011 : 1er bachelier chimie

1. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si une matrice carrée M est inversible, comment calcule-t-on son inverse ?
b) La matrice M donnée admet-elle un inverse ? Pourquoi ?
c) Si l'inverse existe, en déterminer son élément situé sur la 3ème ligne et la 1ère colonne.

Solution.

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{\mathcal{M}}$

b) On a $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1(5\ .\ 1-3\ .1) = 2 \neq 0$ si on remplace la 1ère colonne de M par cette colonne augmentée de 2 fois la 2ème colonne puis qu'on calcule le déterminant en appliquant la 1ère loi des mineurs à la 2ème ligne.
Le déterminant n'étant pas nul, la matrice M admet un inverse.
c) L'élément situé sur la 3ème ligne et la 1ère colonne de M^{-1} s'obtient en divisant le cofacteur de l'élément situé sur la 1ère ligne et la 3ème colonne de M par la valeur du déterminant de M. Dès lors, on a $\frac{-1}{2}$.

2. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
b) Si M est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
c) A partir de l'éventuelle forme diagonale obtenue, effectuer une preuve en utilisant le produit matriciel.

Solution.

a) Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc 1 et 2. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice M est diagonalisable.

<u>Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre 1.</u>

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M - I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = y \end{cases}$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

<u>Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre 2.</u>

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M - 2I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = y \end{array} \right.$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}MS = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $MS = S\Delta$. On a l'égalité puisque

$$MS = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Test du 05/04/2011 : 1er bachelier géographie

1. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Si une matrice carrée M est inversible, comment calcule-t-on son inverse ?
b) La matrice M donnée admet-elle un inverse ? Pourquoi ?
c) Si l'inverse existe, en déterminer son élément situé sur la 2ème ligne et la 1ère colonne.

Solution.

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{\mathcal{M}}$

b) On a $\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -1(-2\ .\ 0 - 3\ .1) = 3 \neq 0$ si on remplace la 2ème colonne de M par cette colonne augmentée de la 1ère colonne puis qu'on calcule le déterminant en appliquant la 1ère loi des mineurs à la 2ème colonne.
Le déterminant n'étant pas nul, la matrice M admet un inverse.

c) L'élément situé sur la 2ème ligne et la 1ère colonne de M^{-1} s'obtient en divisant le cofacteur de l'élément situé sur la 1ère ligne et la 2ème colonne de M par la valeur du déterminant de M. Dès lors, on a $\frac{-4}{3}$.

2. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
b) Si M est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
c) A partir de l'éventuelle forme diagonale obtenue, effectuer une preuve en utilisant le produit matriciel.

Solution.

a) Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4i \\ -i & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc -1 et 4. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice M est diagonalisable.

<u>Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre -1.</u>

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M + I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 4 & 4i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ix \end{cases}$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

<u>Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre 4.</u>

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M - 4I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -1 & 4i \\ -i & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4iy = 0 \\ -ix - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4iy \\ y = y \end{cases}$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre 4 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 4i \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 4i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}MS = \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $MS = S\Delta$. On a l'égalité puisque

$$MS = \begin{pmatrix} 3 & 4i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16i \\ -i & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 4i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16i \\ -i & 4 \end{pmatrix}$$

Test du 30/03/2011 : 1er bachelier géologie

1. **Soit**
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Si une matrice carrée M est inversible, comment calcule-t-on son inverse ?
b) La matrice M donnée admet-elle un inverse ? Pourquoi ?
c) Si l'inverse existe, en déterminer son élément situé sur la 1ère ligne et la 3ème colonne.

Solution.

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{\mathcal{M}}$

b) On a $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1(3\ .\ 2 - 2\ .(-4)) = 14 \neq 0$ si on calcule le déterminant en appliquant la 1ère loi des mineurs à la 2ème colonne.
Le déterminant n'étant pas nul, la matrice M admet un inverse.

c) L'élément situé sur la 1ère ligne et la 3ème colonne de M^{-1} s'obtient en divisant le cofacteur de l'élément situé sur la 3ème ligne et la 1ère colonne de M par la valeur du déterminant de M. Dès lors, on a $\frac{-2}{14} = \frac{-1}{7}$.

2. **Soit**
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
b) Si M est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
c) A partir de l'éventuelle forme diagonale obtenue, effectuer une preuve en utilisant le produit matriciel.

Solution.

a) Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc -2 et -1. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice M est diagonalisable.

<u>Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre -2.</u>

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M + 2I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre -1.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(M+I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ y = y \end{array} \right.$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}MS = \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $MS = S\Delta$. On a l'égalité puisque

$$MS = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Test du 01/04/2011 : 1er bachelier informatique

1. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Si une matrice carrée M est inversible, comment calcule-t-on son inverse ?
b) La matrice M donnée admet-elle un inverse ? Pourquoi ?
c) Si l'inverse existe, en déterminer son élément situé sur la 2ème ligne et la 3ème colonne.

Solution.

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{\mathcal{M}}$

b) On a

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 1(2\ .\ 7 - 1\ .5) = 9 \neq 0$$

si on remplace la 3ème ligne de M par cette ligne augmentée du double de la 1ère ligne puis qu'on calcule le déterminant en appliquant la 1ère loi des mineurs à la 3ème colonne. Le déterminant n'étant pas nul, la matrice M admet un inverse.

c) L'élément situé sur la 2ème ligne et la 3ème colonne de M^{-1} s'obtient en divisant le cofacteur de l'élément situé sur la 3ème ligne et la 2ème colonne de M par la valeur du déterminant de M. Dès lors, on a $\frac{2}{9}$.

2. **Soit**

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
b) Si M est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
c) A partir de l'éventuelle forme diagonale obtenue, effectuer une preuve en utilisant le produit matriciel.

Solution.

a) Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} i-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & i-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (i-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc i (double) et 2 (simple).

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre i.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(M - iI)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ (2-i)z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre i sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $c,\ c'$ complexes non simultanément nuls.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre 2.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(M - 2I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} i-2 & 0 & 0 \\ 0 & i-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i-2)x = 0 \\ (i-2)y + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = y \\ z = (2-i)y \end{array} \right.$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.
La matrice M est donc diagonalisable.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}MS = \Delta = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $MS = S\Delta$.
On a l'égalité puisque

$$MS = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 4-2i \end{pmatrix}$$

et

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 4-2i \end{pmatrix}$$

Test du 04/04/2011 : 1er bachelier physique

1. **Soit**
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Si une matrice carrée M est inversible, comment calcule-t-on son inverse ?
b) La matrice M donnée admet-elle un inverse ? Pourquoi ?
c) Si l'inverse existe, en déterminer son élément situé sur la 3ème ligne et la 2ème colonne.

Solution.

a) $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\widetilde{\mathcal{M}}$

b) On a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 12 & -7 & 5 \end{pmatrix} = 2(7\ .\ 5 - 12\ .3) = -2 \neq 0$$

si on remplace la 1ère colonne de M par cette colonne diminuée du double de la 2ème colonne puis qu'on calcule le déterminant en appliquant la 1ère loi des mineurs à la 2ème ligne.
Le déterminant n'étant pas nul, la matrice M admet un inverse.

c) L'élément situé sur la 3ème ligne et la 2ème colonne de M^{-1} s'obtient en divisant le cofacteur de l'élément situé sur la 2ème ligne et la 3ème colonne de M par la valeur du déterminant de M. Dès lors, on a $\frac{13}{-2} = \frac{-13}{2}$.

2. **Soit**
$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ -2-i & 0 & i \end{pmatrix}$$

a) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M.
b) Si M est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
c) A partir de l'éventuelle forme diagonale obtenue, effectuer une preuve en utilisant le produit matriciel.

Solution.

a) Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & i-\lambda & 0 \\ -2-i & 0 & i-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (i-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc i (double) et -2 (simple).

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre i.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(M - iI)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2-i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-2-i)x = 0 \\ (-2-i)x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = y \\ z = z \end{array} \right.$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre i sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c,\ c'$ complexes non simultanément nuls.

Recherche des vecteurs propres associés à la valeur propre -2.

Pour cela, cherchons les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(M + 2I)X = 0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ -2-i & 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2+i)y = 0 \\ (-2-i)x + (2+i)z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \right.$$

Dès lors, les vecteurs propres associés à la valeur propre -2 sont les vecteurs $c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice M est donc diagonalisable.

b) La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}MS = \Delta = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) Pour vérifier que les matrices ci-dessus sont correctes, vérifions qu'on a bien $MS = S\Delta$. On a l'égalité puisque

$$MS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ -2-i & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$S\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & -2 \end{pmatrix}$$