1, 2, 3. . .Sciences

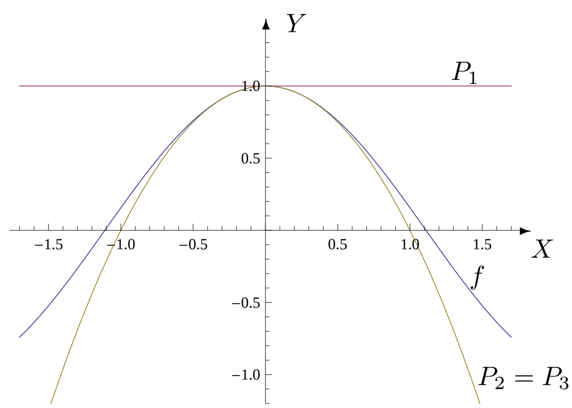
Année académique 2010-2011

Corrigé de l'examen de math B du 16 août 2011

Version 9 avril 2015

Exercices

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = \cos(\sqrt{2}\ x).$$
(a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
(b) Dans un même repère orthonormé, au voisinage de 0, représenter le graphique de f et des approximations demandées en utilisant différentes couleurs.
(c) (*Physiciens, informaticiens, chimistes, géographes*) Estimer les restes des différentes approximations. En déduire que $0 \leq \cos(\sqrt{2}) \leq \frac{1}{6}$.
Solution. (a) La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\ x) \quad D^2f(x) = -2\cos(\sqrt{2}\ x) \ \text{ et } \ D^3f(x) = 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\ x).$$
Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 0,\ D^2f(0) = -2$ et $D^3f(0) = 0$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 \qquad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2$$
et
$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{D^3f(0)}{3!}x^3 = 1 - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$
(b)



(c) Si $R_n(x)$ est le reste de l'approximation à l'ordre n, on a
$$R_1(x) = -\cos(\sqrt{2}\ u)\ x^2,\ R_2(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\ u)}{3}\ x^3 \quad \text{et} \quad R_3(x) = \frac{\cos(\sqrt{2}\ u)}{6}\ x^4$$
avec u strictement compris entre 0 et x.
Dès lors, comme $|R_3(x)| \leq \frac{x^4}{6}$ et comme $\cos(\sqrt{2}\ x) = 1 - x^2 + R_3(x)$, pour $x = 1$ on peut déduire que $0 \leq \cos(\sqrt{2}) \leq \frac{1}{6}$.

2. **a) On donne la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(a) Montrer que 2 est une valeur propre de A et que le vecteur
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
est un vecteur propre pour celle-ci

Solution. Il suffit donc de prouver que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le premier membre de cette égalité vaut

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien égal au second membre.

(b) Soit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -8 & 2 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AB et en déduire l'expression explicite de l'inverse de A.

Solution. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -8 & 2 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} = -20\ I.$$

Vu la définition et l'unicité de l'inverse d'une matrice, l'inverse de A est donné par $-\frac{1}{20}B$.

(c) A partir de ce qui précède, obtenir rapidement l'expression explicite de la matrice $C = B^4A^9B^4$ et de la matrice $D = \widetilde{B}\widetilde{A}B$.

Solution. La matrice

$$C = B^4A^9B^4 = (BA)^4A(AB)^4 = (-20\ I)^4A(-20\ I)^4 = 20^8A$$

et la matrice

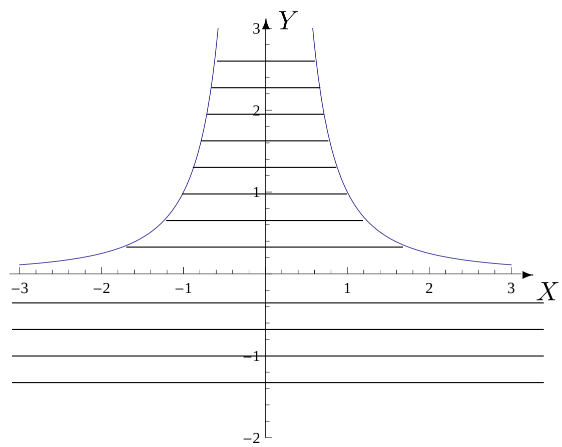
$$D = \widetilde{B}\widetilde{A}B = (\widetilde{AB})B = (-20\ I)B = -20\ B.$$

3. **(a) On donne la fonction g par**

$$g(x, y) = \sqrt{1 - yx^2}.$$

- Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction g est égal à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - yx^2 > 0\}$.
Voici une représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des courbes sont exclus de l'ensemble.



- Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(2\sin t, 2\cos^2 t)$, le sous-ensemble I de $[0,\pi]$ où cette fonction est dérivable et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de I.

Solution. L'expression explicite de G est donnée par

$$G(t) = \sqrt{1 - 2\ \cos^2 t\ .\ 4\ \sin^2 t} = \sqrt{1 - 2\ \sin^2(2t)} = \sqrt{\cos(4t)}$$

et son domaine de dérivabilité est l'ensemble

$$\{t \in \mathbb{R} : \cos(4t) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right[.$$

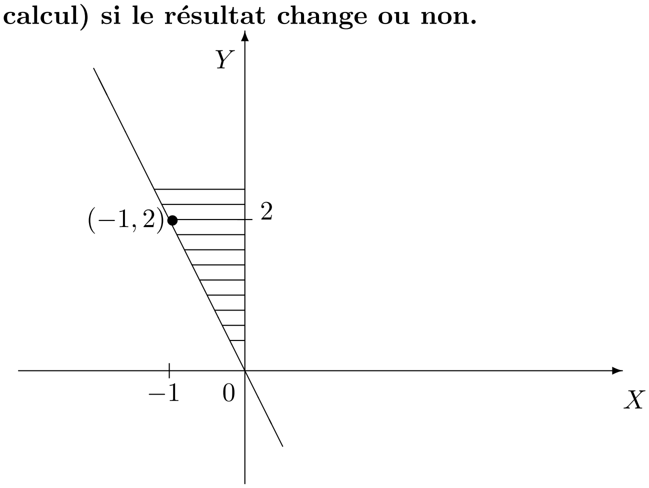
Dès lors, le sous-ensemble I de $[0,\pi]$ est $I = [0, \frac{\pi}{8}[\cup]\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}[\cup]\frac{7\pi}{8}, \pi]$.
En tout point du domaine de dérivabilité, on a

$$DG(t) = \frac{-2\ \sin(4t)}{\sqrt{\cos(4t)}}$$

(b) On donne l'ensemble fermé non borné A (hachuré). Si possible, déterminer

$$\int\int_A e^{x-y}\ dx\ dy$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter alors les intégrales et déterminer (en effectuant le calcul) si le résultat change ou non.



Solution. L'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes, est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, 0],\ y \in [-2x, +\infty[\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[\,,\ x \in \left[-\frac{y}{2}, 0\right]\right\}.$$

La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x-y}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue et positive sur A, ensemble fermé non borné. Etudions son intégrabilité en considérant

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-y/2}^0 e^x\ .\ e^{-y}\ dx\right)\ dy.$$

Si y est fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-y}\ .\ e^x$ est continue sur le fermé borné $\left[-\frac{y}{2}, 0\right]$ donc y est intégrable et on a

$$\int_{-y/2}^0 e^x\ .\ e^{-y}\ dx = e^{-y}[e^x]_{-y/2}^0 = e^{-y}(1 - e^{-y/2}) = e^{-y} - e^{-3y/2}.$$

Voyons à présent si

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \left(e^{-y}-e^{-3y/2}\right)\,dy$$

est finie. Si c'est le cas, la fonction donnée sera intégrable et la limite trouvée sera la valeur de l'intégrale.
On a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \left(e^{-y}-e^{-3y/2}\right)\,dy = \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-y}+\frac{2}{3}e^{-3y/2}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-3t/2}+1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

La limite étant finie, la fonction est intégrable et la valeur de l'intégrale est $1/3$. La fonction étant intégrable, on peut permuter l'ordre d'intégration et on obtiendra le même résultat. Montrons-le en effectuant les calculs. On a

$$I=\int_{-\infty}^0\left(\int_{-2x}^{+\infty} e^x\ .\ e^{-y}\ dy\right)\ dx = \int_{-\infty}^0 -e^x[e^{-y}]_{-2x}^{+\infty}\ dx = \int_{-\infty}^0 e^x\ .\ e^{2x}\ dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{3}.$$

4. (***Physiciens, informaticiens, chimistes, géographes***)
Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-e^{-1})^m},\qquad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{m^2+2m+1}}{(m+1)!},\qquad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Solution. La série $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-e^{-1})^m}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{e}{e-1}\right)^m$, série géométrique divergente puisque $\frac{e}{e-1}\notin]-1,1[$.

La série $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{m^2+2m+1}}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{(m+1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!} = \exp(1)$ est donc convergente.

La série $\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ diverge. En effet, la suite des sommes partielles s'écrit $-1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ldots$ suite dont on peut extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes (-1 et 0).