1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Corrigé de l'examen de math B du 23 mai 2011

Version 9 avril 2015

Exercices

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \text{tg}x.$$

a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées au voisinage de 0 en utilisant différentes couleurs.
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et on a

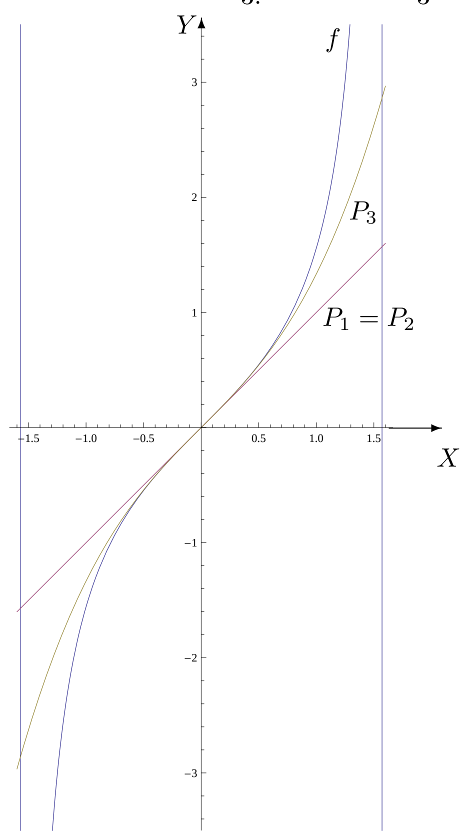
$$Df(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad D^2f(x) = 2\sin(x)\cos^{-3}(x) \text{ et } D^3f(x) = 2\cos^{-2}(x) + 6\sin^2(x)\cos^{-4}(x).$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$, $D^2f(0) = 0$ et $D^3f(0) = 2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = x, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = x$$

et

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{D^3f(0)}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}, \; x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) On donne la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de A.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = (1-\lambda)^2 - i^2 = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont $1-i$ et $1+i$.

- Montrer que cette matrice vérifie la relation

$$2A - A^2 = 2I$$

où I est la matrice identité (à deux dimensions).

Solution. Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

b) Soient les matrices

$$B = \begin{pmatrix} \cos 1 & i-1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si c'est possible, calculer le déterminant du produit BC et celui du produit CB.

Solution. Les produits BC et CB sont possibles car le nombre de colonnes du premier facteur est égal au nombre de lignes du second.
Le produit BC est une matrice de dimension 1 et vaut $(-i\cos 1 + 2i - 2)$; le déterminant de BC vaut donc $-2 + i(2-\cos 1)$.
Le produit CB est une matrice de dimension 2 et vaut

$$CB = \begin{pmatrix} -i\cos 1 & 1+i \\ 2\cos 1 & -2+2i \end{pmatrix}$$

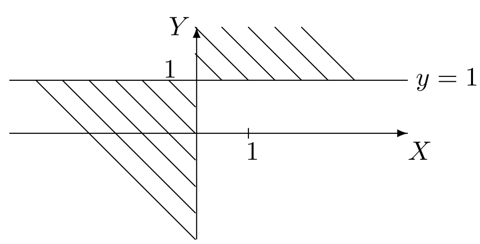
et le déterminant de CB vaut 0 puisque la deuxième ligne vaut $2i$ fois la première.

3. **a) On donne la fonction g par**

$$g(x,y) = \ln(xy - x).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction g est égal à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x > 0\}$. Voici une représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des droites sont exclus de l'ensemble.



- Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(e^{-t}-1, e^{-t}+1)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.
- Que vaut la dérivée de G en $t = 1$? Simplifier votre réponse au maximum.

Solution. L'expression explicite de G est donnée par $G(t) = \ln((e^{-t}-1)(e^{-t}+1) - (e^{-t}-1)) = \ln(e^{-2t} - e^{-t})$ et son domaine de dérivabilité est l'ensemble

$$\{t \in \mathbb{R} : e^{-2t} - e^{-t} > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : e^{-t} - 1 > 0\} =]-\infty, 0[.$$

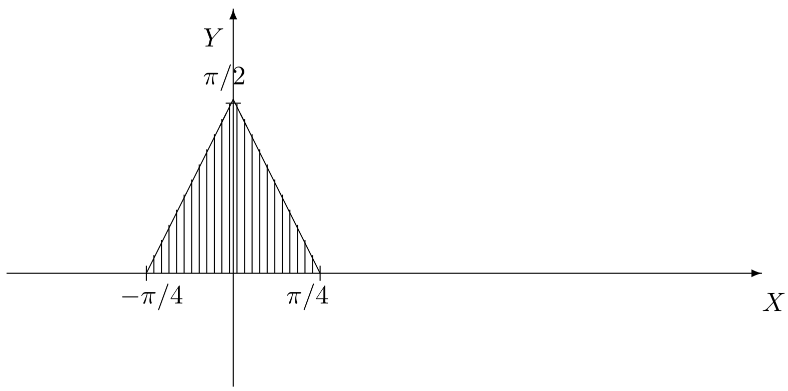
En tout point du domaine de dérivabilité, on a

$$DG(t) = \frac{-2e^{-2t} + e^{-t}}{e^{-2t} - e^{-t}} = \frac{-2e^{-t} + 1}{e^{-t} - 1}$$

Vu le domaine de dérivabilité de G, cette fonction n'est pas dérivable en 1.

b) **On donne l'ensemble borné hachuré A suivant. Déterminer**

$$\int\int_A \cos(2x)\sin(y)\ dx\ dy.$$



Solution. L'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes, est notamment égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x \in \left[\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right]\right\}.$$

La fonction $f : (x,y) \mapsto \cos(2x)\sin(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}} \cos(2x)\sin(y)\ dx\right)\ dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin(2x)\sin(y)\Big]_{x=\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}}\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right)\sin(y)\ dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\sin(y)\ dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\cos(y)\ dy = \left[\frac{\sin^2(y)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

4. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^m}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}, \quad (iv)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m$, série géométrique convergente puisque $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} - 1}.$$

La série $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^m}{m!}$ est convergente car c'est l'image du réel $\ln 2$ par la fonction exponentielle. La somme de cette série vaut $\exp(\ln 2) = 2$.

La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}$ diverge. En effet, on a

$$\frac{m!}{m^2} = \frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{m-1}{m} \geq \frac{1}{2}$$

quel que soit le naturel $m \geq 2$. La suite $\dfrac{m!}{m^2}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ ne converge donc pas vers 0. Dès lors, la série de terme général $\dfrac{m!}{m^2}$ ne converge pas.

Considérons la somme partielle $\displaystyle\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)}$. Par une décomposition en somme de fractions simples, on a

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m} - \sum_{m=2}^{M+1} \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{M+1}.$$

Dès lors, la série converge puisque la limite

$$\lim_{M \to +\infty} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{M \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{M+1} \right) = 1$$

est finie et la somme de la série vaut 1.