1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

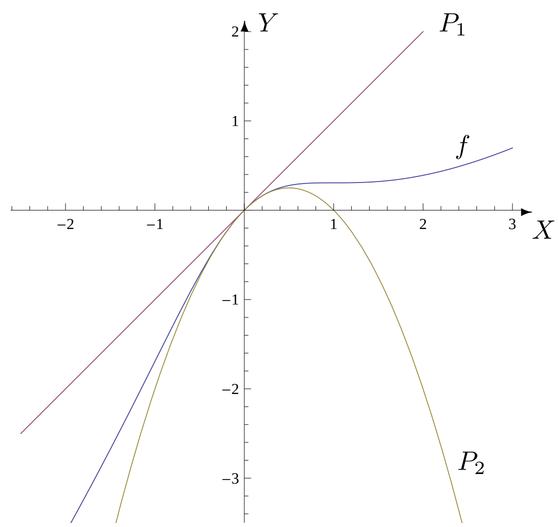
Corrigé de l'examen de math B du 31 mai 2011

Version 6 juin 2011

Exercices

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = x - \ln(1+x^2).$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f au voisinage de 0, ainsi que les approximations demandées (en utilisant différentes couleurs)

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad D^2f(x) = -\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2}.$$
Comme $f(0)=0,\ Df(0)=1$ et $D^2f(0)=-2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = x - x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **On donne la matrice A comme étant le produit suivant**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+i} & 1 \\ -1 & \frac{2}{1-i} \end{pmatrix}.$$
a) Déterminer les valeurs propres de A. Simplifier votre réponse au maximum.
b) S'il existe, déterminer l'inverse de A. Simplifier votre réponse au maximum.

Solution. Comme $\dfrac{2}{1+i} = 1-i$ et $\dfrac{2}{1-i} = 1+i$, on peut donner plus simplement la matrice A sous la forme
$$A == \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 1+2i \\ 1-2i & -2i \end{pmatrix}.$$
a) Dès lors, les valeurs propres de A sont les solutions de
$$\det \begin{pmatrix} -2i-\lambda & 1+2i \\ 1-2i & -2i-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2i-\lambda)^2 - 5 = 0.$$
Ainsi, les valeurs propres de A sont $-\sqrt{5}-2i$ et $\sqrt{5}-2i$.

b) Comme le déterminant de A vaut $-4-5=-9\neq 0$, la matrice inverse de A existe.
La matrice des cofacteurs des éléments de A étant égale à

$$\begin{pmatrix} -2i & -1+2i \\ -1-2i & -2i \end{pmatrix}, \quad \text{sa transposée s'écrit} \quad \begin{pmatrix} -2i & -1-2i \\ -1+2i & -2i \end{pmatrix}$$

et l'inverse de A vaut

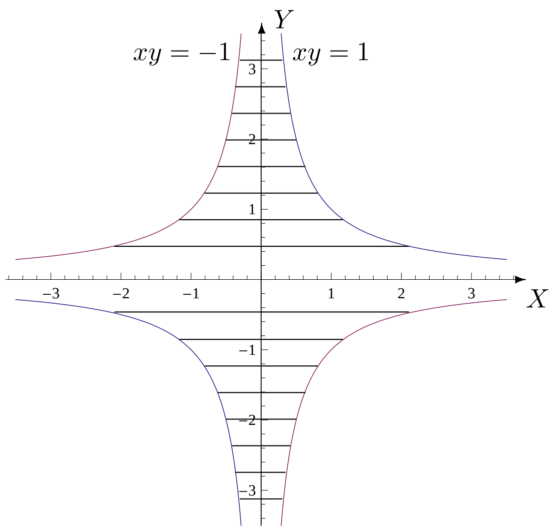
$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2i & 1+2i \\ 1-2i & 2i \end{pmatrix}.$$

3. **a) On donne la fonction g par**

$$g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}.$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction g est égal à $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x^2y^2>0\}$. Voici une représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des hyperboles sont exclus de l'ensemble.



- Déterminer l'expression explicite de $G(t)=g(2\sin t,\sqrt{2}\cos t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.

Solution. L'expression explicite de G est donnée par $G(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-8\sin^2(t)\cos^2(t)}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-2\sin^2(2t)}}$

et son domaine de dérivabilité est l'ensemble

$$\{t\in\mathbb{R}:1-2\sin^2(2t)>0\}=\left\{t\in\mathbb{R}:-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin(2t)<\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right[.$$

En tout point du domaine de dérivabilité, on a

$$DG(t)=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2(2t))^{-\frac{3}{2}}(-2).2\sin(2t)\cos(2t).2=\frac{2\sin(4t)}{\sqrt{(1-2\sin^2(2t))^3}}.$$

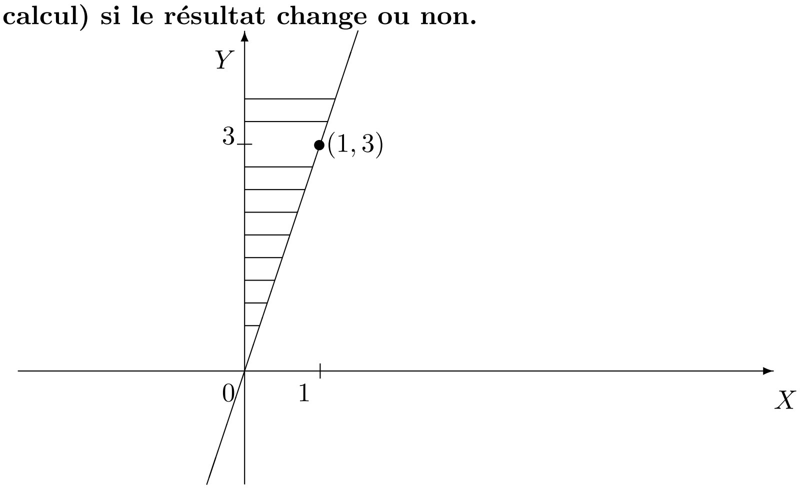
- Que vaut la dérivée de G en $t=\pi/12$? Simplifier votre réponse au maximum.

Solution. Vu le domaine de dérivabilité de G, cette fonction est dérivable en $t = \pi/12$ et sa dérivée vaut
$$\frac{2\sin(\frac{\pi}{3})}{\sqrt{(1-2\sin^2(\frac{\pi}{6}))^3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}.$$

b) On donne l'ensemble fermé non borné A (hachuré). Si possible, déterminer

$$\int\int_A e^{-y}\ dx\ dy$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter alors les intégrales et déterminer (en effectuant le calcul) si le résultat change ou non.



Solution. L'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes, est égal à

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [3x,+\infty[\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in \left[0,\frac{y}{3}\right]\right\}.$$

La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-y}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé non borné et on a $|f| = f$.
Fixons x dans $[0,+\infty[$ et étudions l'intégrabilité de $y \mapsto e^{-y}$ sur $[3x,+\infty[$ en calculant la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{3x}^{t} e^{-y}\ dy.$$

Si cette limite est finie, la fonction sera intégrable en y et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale. On a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{3x}^{t} e^{-y}\ dy = \lim_{t\to+\infty}[-e^{-y}]_{3x}^{t} = -\lim_{t\to+\infty}(e^{-t} - e^{-3x}) = e^{-3x}$$

puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ et ainsi la fonction est intégrable en y.
Etudions l'intégrabilité de $x \mapsto e^{-3x}$ sur $[0,+\infty[$ en calculant la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^{-3x}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^t = -\frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty}(e^{-3t}-1) = \frac{1}{3}.$$

Comme cette limite est finie, la fonction est intégrable en x et la fonction donnée est intégrable sur A. De plus, comme $|f| = f$, l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\int_{3x}^{+\infty} e^{-y}\ dy\right)\ dx = \frac{1}{3}.$$

Puisque la fonction est intégrable sur A, on sait qu'en permutant l'ordre d'intégration on obtiendra le même résultat. Vérifions-le en calculant

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\frac{y}{3}} e^{-y}\ dx \right)\ dy.$$

Comme

$$I_1 = \int_0^{\frac{y}{3}} e^{-y}\ dx = \frac{y}{3} e^{-y},$$

en effectuant une intégration par parties, on a

$$I = \frac{1}{3} \left([-ye^{-y}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\ dy \right) = -\frac{1}{3} [e^{-y}]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

puisque $\lim\limits_{y \to +\infty} (ye^{-y}) = 0$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} (e^{-y}) = 0$.

4. **Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme**

$$(i)\ \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^m}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{m^2+1}, \quad (iv)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$

Solution. La série $\sum\limits_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\sum\limits_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m$, série géométrique convergente puisque $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1, 1[$. La somme de cette série vaut

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

La série $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{e^m}{m!}$ est convergente car c'est l'image du réel e par la fonction exponentielle. La somme de cette série vaut $\exp(e) = e^e$.

La série $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{m^2+1}$ diverge. En effet, on a

$$\frac{m}{m^2+1} = \frac{1}{m + \frac{1}{m}} \geq \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{2m} \geq 0$$

quel que soit le naturel $m \geq 1$. Comme la série de terme général $\frac{1}{m}$ (série harmonique) diverge, par application du critère de comparaison, la série donnée diverge.

Considérons la somme partielle $\sum\limits_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)}$. Par une décomposition en somme de fractions simples, on a

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m} - \sum_{m=2}^{M+1} \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{M+1}.$$

Dès lors, la série converge puisque la limite

$$\lim_{M \to +\infty} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{M \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{M+1} \right) = 1$$

est finie et la somme de la série vaut 1.