1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 1, exercices de rappel : solutions

Version 10 février 2011 (V1 : 23/01/2010)

Exercices de rappel

1. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A-0,78).0,22}$$

Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

La quantité de matière A introduite dans le milieu réactionnel vaut 1,001 mol.

2. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5-x)(0,25-x)}$$

Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

Le nombre de moles par litre de produit formé vaut $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc approximativement 0,146 mol/L.

3. **En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à $17\ \%$ de la quantité initiale.**
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

a) La demi-vie du carbone-14 est de 5 728 années.
b) L'arbuste a 14 644 ans.

4. **Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle**

$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2}\sin^2\theta - \cos\theta,\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$$

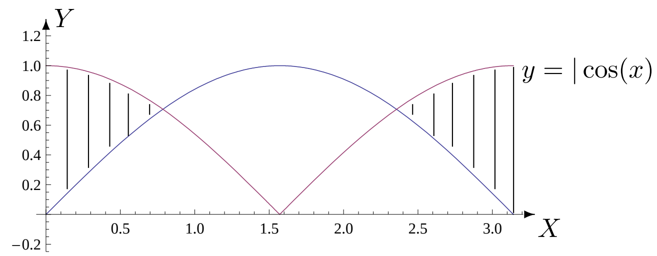
où n est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

Les extrema éventuels sont compris dans l'ensemble des zéros de la dérivée première de ν.
Si $n \in]0, 1]$ les zéros sont $-\pi,\ 0$ et π.
Si $n > 1$, les zéros sont $-\pi,\ 0,\ \pi$ et $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.

Pour avoir un extremum, la dérivée doit changer de signe de part et d'autre du zéro. Dès lors,
- si $n \in]0, 1]$, on a un maximum en $-\pi$ et π et un minimum en 0
- si $n > 1$, on a un maximum en $-\pi,\ 0$ et π et un minimum en $\pm\text{arcos}(\frac{1}{n^2})$.

5. **Déterminer l'aire de la surface du plan dont une représentation analytique est donnée ci-dessous. En la hachurant, représenter cette surface dans le plan muni d'un repère orthonormé.**

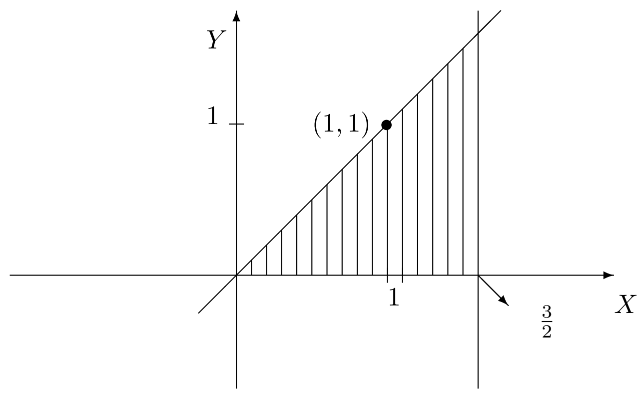
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in [0, \pi],\ \sin x \leq y \leq |\cos x|\}$$



L'aire de la surface hachurée vaut $2\sqrt{2} - 2$.

6. **Pour toutes les valeurs du réel strictement positif r, déterminer la valeur de l'intégrale suivante**
$$I(r) = \int_0^r \ln x \; dx.$$
Pour quelle(s) valeur(s) de r cette intégrale est-elle nulle ? Interpréter graphiquement la réponse.
L'intégrale vaut $r\ln(r) - r$; elle est nulle pour $r = e$. Cela signifie que l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 0, y = 0$ et la courbe d'équation $y = \ln(x),\ x \in]0, 1]$ d'une part et l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = e, y = 0$ et la courbe d'équation $y = \ln(x),\ x \in [1, e]$ d'autre part sont égales.

7. **Déterminer une représentation analytique de l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)**



Une représentation analytique de cet ensemble est donnée par
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{3}{2}\right],\ y \in [0, x]\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{3}{2}\right],\ x \in \left[y, \frac{3}{2}\right]\right\}.$$