1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 1, exercices relatifs à l'intégration de fonctions de plusieurs variables : solutions

Version 1er mars 2011 (V1 : 23/01/2010)

Intégration de fonctions de plusieurs variables

1. **a) Calculer l'intégrale de** $f(x,y) = y^2 \sin(xy)$ **sur** $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$**.**

   L'intégrale vaut $\dfrac{4}{\pi^2} - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{1}{2}$.

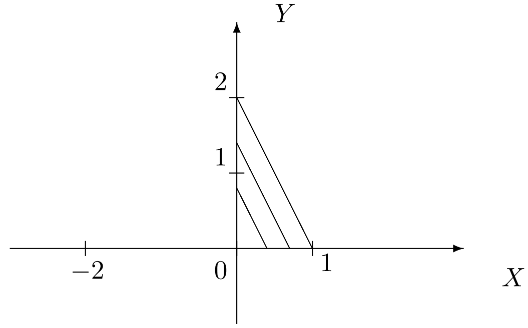
   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x + y$ **sur** $A = \{(x,y)\ :\ 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.
   L'intégrale vaut $\dfrac{1}{3}$.

   c) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = \cos(2x+3y)$ **sur** $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,\pi]$**.**

   L'intégrale vaut $-\dfrac{2}{3}$.

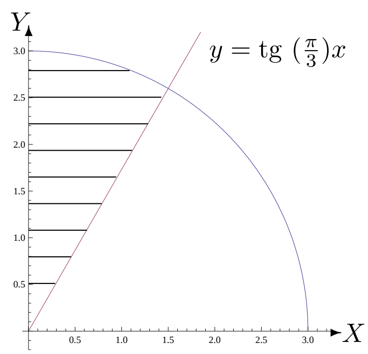
2. **Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble borné fermé hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum**

$$\int\int_A e^{x+y} dx dy$$



   L'intégrale vaut $(e-1)^2$.

3. **Calculer** $\int\int_A \sqrt{x^2+y^2} dx\ dy$ **où** A **est l'ensemble hachuré ci-dessous.**



   L'intégrale vaut $\dfrac{3\pi}{2}$.

4. **Soit** A **une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de** A **(considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées** (x_A, y_A) **où**

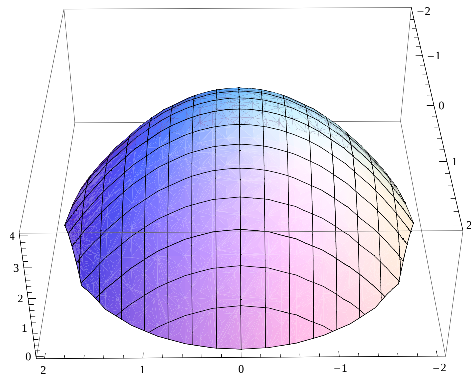
$$x_A = s^{-1} \int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1} \int\int_A y\ dx\ dy$$

   et où s **est l'aire de la surface** A**.**
   Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon R **(**R **réel strictement positif).**

Le centre de masse a pour coordonnées $(x_A, y_A) = \left(0, \dfrac{4R}{3\pi}\right)$ si le diamètre du demi-disque se trouve sur l'axe des abscisses.

5. **a) Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan des axes X, Y. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.**

   Le volume de ce corps vaut 8π et sa repésentation graphique est



   b) Déterminer le volume du corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation cartésienne $x + 2y + 3z = 6$.

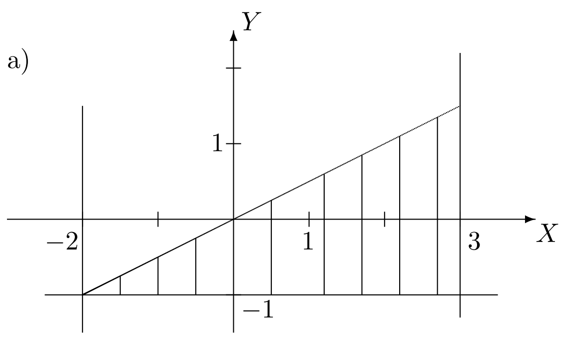
   Le volume de ce corps vaut 6.

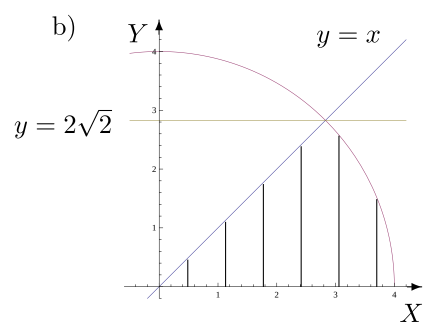
6. **Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a)\ \int_{-2}^{3}\left(\int_{-1}^{x/2} f(x,y)dy\right)dx, \qquad b)\ \int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx\right)dy.$$

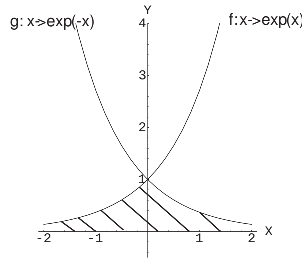
   Après permutation, on a

$$a)\ \int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left(\int_{2y}^{3} f(x,y)dx\right)dy, \qquad b)\ \int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)dy\right)dx + \int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy\right)dx.$$





7. **Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x + y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)**



Une description analytique de cet ensemble est

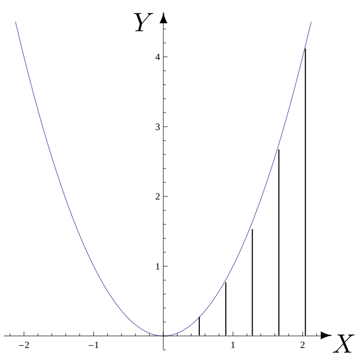
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\,]-\infty,0],\ y\in[0,e^x]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,+\infty[,\ y\in[0,e^{-x}]\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\,]0,1],\ x\in[\ln(y),-\ln(y)]\}.$$

L'intégrale vaut $\frac{1}{2}$.

8. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

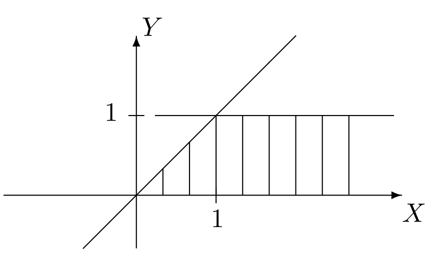
$$a)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx,\quad b)\int_0^1\left(\int_y^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dx\right)dy,\quad c)\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

a) L'ensemble d'intégration est $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\,]0,+\infty[,\ y\in[0,x^2]\}$ et sa représentation est l'ensemble hachuré ci-dessous.



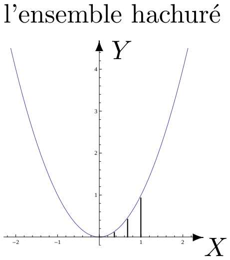
L'intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln 2$.

b) L'ensemble d'intégration est $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\,]0,1],\ x\in[y,+\infty[\}$ et sa représentation est l'ensemble hachuré ci-dessous.



L'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$.

c) L'ensemble d'intégration est $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\,]0,1],\ y\in[0,x^2]\}$ et sa représentation est l'ensemble hachuré ci-dessous.

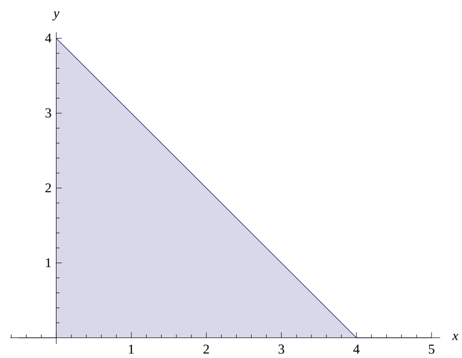


L'intégrale vaut $2\ \ln(2)-1$.

9. **(Tous sauf biologistes et géologues) La masse d'une plaque plane est donnée par**

$$m = \int\int_R \delta(x,y) dxdy,$$

où $\delta(x,y)$ est la densité au point de coordonnées (x,y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,
a) quelle est la masse de cette plaque ?
b) en quelles unités s'exprime la constante K ?



a) La masse de la plaque vaut $\frac{128K}{3}$ kg

b) La constante K s'exprime en kg/m^4.

1. c'est-à-dire $\delta(x,y) = K(x^2+y^2)$ (où K est une constante)