Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

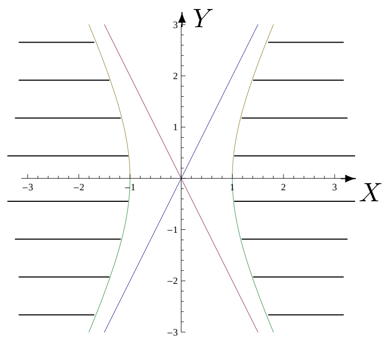
Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUE, SECOND QUADRIMESTRE
LISTE TYPE NUMÉRO 1, EXERCICES RELATIFS AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES : SOLUTIONS

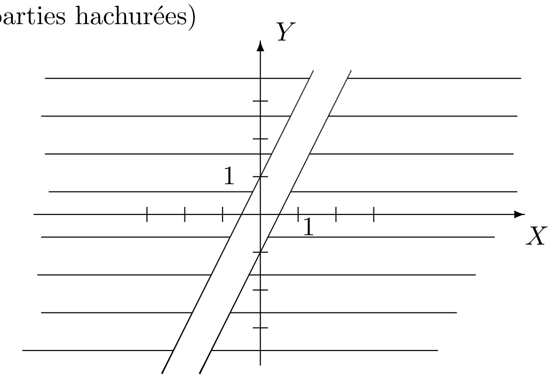
Version 16 février 2011 (V1 : 23/01/2010)

Fonctions de plusieurs variables

1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**
$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - \frac{y^2}{4} - 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{|2x-y|-1}.$$
Les domaines de définition sont respectivement
$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 > 0\right\} \qquad \mathrm{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x-y|-1 \geq 0\}$$
et les représentations graphiques sont les suivantes (parties hachurées)



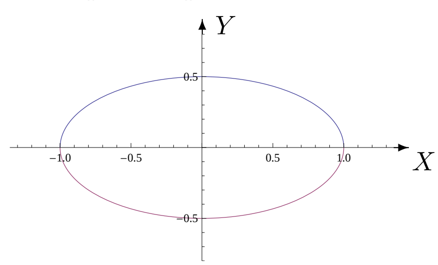
Les points de l'hyperbole n'appartiennent pas à l'ensemble.



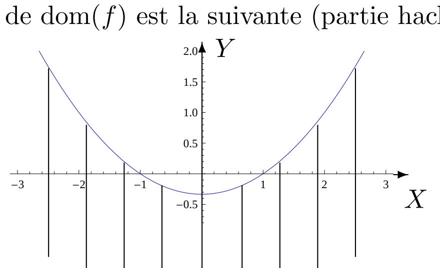
Les points des droites appartiennent à l'ensemble.

2. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$. Comment appelle-t-on une telle courbe ?**

La trace de la surface donnée dans le plan d'équation $z = 0$ est une ellipse dont voici la représentation



3. **On donne les fonctions f et g par**
$$f(x,y) = \ln(x^2 - 1 - 3y), \quad g(x,y) = \sin(x^2y^3 + 5x).$$
a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
Les domaines de définition et de dérivabilité sont identiques et respectivement égaux à
$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 - 3y > 0\right\} \qquad \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}^2.$$
La représentation graphique de dom(f) est la suivante (partie hachurée)



Les points de la parabole sont exclus de l'ensemble.

b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.
On a

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2-1-3y}, \qquad D_y f(x,y) = \frac{-3}{x^2-1-3y}$$

et

$$D_x g(x,y) = (2xy^3+5)\cos(x^2y^3+5x), \qquad D_y g(x,y) = 3x^2y^2\cos(x^2y^3+5x).$$

4. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

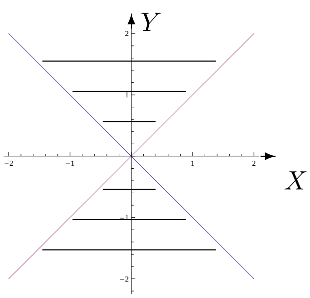
$$f(x,y) = \text{arcos}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x^2+y+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilité de ces fonctions. Représenter ces domaines.

Les domaines de définition et d'infinie dérivabilité de f sont respectivement

$$\text{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, -1 \leq \frac{x}{y} \leq 1\right\} \quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, -1 < \frac{x}{y} < 1\right\}$$

dont voici la représentation

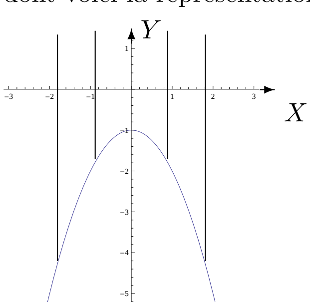


Les points de l'axe des abscisses n'appartiennent à aucun des deux ensembles ; ceux des bissectrices appartiennent au domaine de définition mais non à celui d'infinie dérivabilité. Les points des parties hachurées du plan appartiennent aux deux ensembles.

Le domaine de définition et celui d'infinie dérivabilité de g sont respectivement

$$\text{dom}(g) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y+1 \geq 0\right\} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y+1 > 0\right\}$$

dont voici la représentation



Les points de la parabole sont compris dans le domaine de définition mais exclus du domaine d'infinie dérivabilité. Les points de la partie hachurée du plan appartiennent aux deux ensembles.

b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.

On a

$$|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \\ \frac{2x}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si} \quad x \text{ et } y \text{ sont de signes différents.} \end{cases}$$

c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

L'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$ est donnée par $F(t) = \arccos(t^2)$. Si on considère la fonction F donnée explicitement par $F(t) = \arccos(t^2)$, son domaine de dérivabilité est $]-1, 1[$ et sa dérivée est donnée explicitement par

$$DF(t) = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

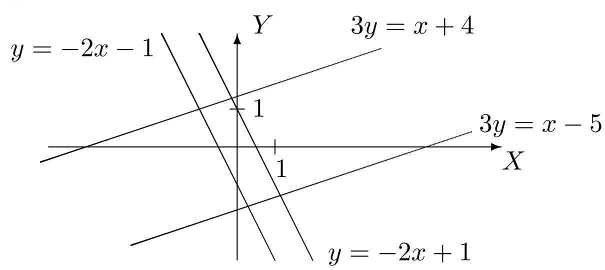
Si on envisage la fonction F comme fonction composée alors son domaine de dérivabilité est $]-1, 1[\setminus\{0\}$.

d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g\left(\sin t,\ \cos^2 t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

L'expression explicite de $G(t) = g\left(\sin t,\ \cos^2 t\right)$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{2})$. Son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle.

5. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1, 1[\times]-4, 5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(2x + y, x - 3y)$ ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.**

Le domaine de dérivabilité de F est l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \in\ ]-1, 1[,\ x - 3y \in\ ]-4, 5[\}$ c'est-à-dire, dans un repère orthonormé, les points intérieurs au parallélogramme dont les sommets ont pour coordonnées cartésiennes $(-1, 1), (-1/7, 9/7), (8/7, -9/7)$ et $(2/7, -11/7)$ et dont voici une représentation graphique



Ses dérivées partielles sont

$$D_x F(x, y) = 2(D_u f)_{(2x+y, x-3y)} + (D_v f)_{(2x+y, x-3y)}$$

et

$$D_y F(x, y) = (D_u f)_{(2x+y, x-3y)} - 3(D_v f)_{(2x+y, x-3y)}$$

où u est la première variable de f et v la seconde.

b) Même question pour g continûment dérivable sur $]0, 1[\times\mathbb{R}$ et $G(x, y) = g(\ln x,\ \arcsin(e^y))$.

Le domaine de dérivabilité de G est l'ouvert $]1, e[\times]-\infty, 0[$.
Ses dérivées partielles sont

$$D_x G(x, y) = (D_u g)_{(\ln x, \arcsin(e^y))} \frac{1}{x}$$

et

$$D_y G(x, y) = (D_v g)_{(\ln x, \arcsin(e^y))} \frac{e^y}{\sqrt{1 - e^{2y}}}$$

où u est la première variable de g et v la seconde.

6. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2\ \cos(2x_3)$.**
Le gradient de la fonction f est le vecteur de composantes $(x_2 \cos(2x_3), x_1 \cos(2x_3), -2x_1 x_2 \sin(2x_3))$.

b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x, y, z) = z^2 e^{xy^3 z}$.
Le gradient de la fonction g est le vecteur de composantes $(y^3 z^3 e^{xy^3 z}, 3xy^2 z^3 e^{xy^3 z}, (2z + xy^3 z^2)\ e^{xy^3 z})$.