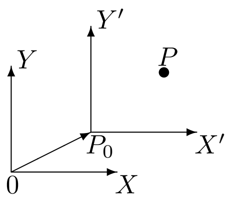
1 Rappels et définition

1.1 Changement de repère orthonormé

Tanslation

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé du plan d'axes X et Y. Les coordonnées d'un point P du plan dans ce repère sont (x, y). Effectuons une translation de ce repère qui amène le point O sur le point P_0 dont les coordonnées dans le repère initial sont (x_0, y_0). Dans ce nouveau repère, les coordonnées du point P sont (x', y').

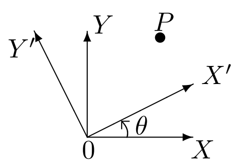


Le lien entre les coordonnées de P dans ces deux repères est donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad X = X_0 + X'.$$

Rotation

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé du plan d'axes X et Y. Les coordonnées d'un point P du plan dans ce repère sont (x, y). Effectuons une rotation de ce repère autour de O d'un angle θ dans le sens trigonométrique. Dans ce nouveau repère, les coordonnées du point P sont (x', y').



Le lien entre les coordonnées de P dans ces deux repères est donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad X = UX'.$$

Remarquons que la matrice de rotation U est telle que $U^{-1} = \widetilde{U}$.

Cas général

Si on effectue une translation et une rotation, le lien entre les coordonnées de P dans ces deux repères est donné par

$$X = X_0 + UX' \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

1.2 Définition d'une conique

Une conique est un ensemble de points du plan qui, dans un repère orthonormé, vérifient l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

où les coefficients et les variables sont réels, les coefficients des termes du second degré n'étant pas tous nuls.

Sous forme matricielle, cette équation peut s'écrire

$$\widetilde{X}HX + 2\widetilde{B}X + f = 0 \quad \text{avec} \quad H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la matrice H n'est pas nulle et qu'elle est égale à sa transposée.

2 Effet d'un changement de repère sur l'équation d'une conique

Transformons l'équation générale d'une conique pour obtenir une équation canonique. Ces transformations s'effectuent à l'aide d'un changement de repère.

Considérons le changement de repère orthonormé défini par $X = X_0 + UX'$. L'équation $\widetilde{X}HX + 2\widetilde{B}X + f = 0$ s'écrit successivement

$$(X_0 + UX')^{\sim}H(X_0 + UX') + 2\widetilde{B}(X_0 + UX') + f = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X_0}HX_0 + \widetilde{X'}\widetilde{U}HX_0 + \widetilde{X_0}HUX' + \widetilde{X'}\widetilde{U}HUX' + 2\widetilde{B}X_0 + 2\widetilde{B}UX' + f = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X'}\widetilde{U}HUX' + 2\widetilde{X_0}HUX' + 2\widetilde{B}UX' + \widetilde{X_0}HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X'}\widetilde{U}HUX' + 2(HX_0 + B)^{\sim}UX' + \widetilde{X_0}HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{X'}H'X' + 2\widetilde{B'}X' + f' = 0
\end{aligned}$$

si on note $H' = \widetilde{U}HU$, $\widetilde{B'} = (HX_0 + B)^{\sim}U$ et $f' = \widetilde{X_0}HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f$.

Remarquons que puisque $\widetilde{U} = U^{-1}$, la matrice H' est la transformée de H par la matrice U. Si les colonnes de U sont des vecteurs propres de H alors la matrice H' sera une matrice diagonale.
On constate également que si X_0 est le tableau des coordonnées d'un point de la conique alors $f' = 0$.

3 Recherche des valeurs propres de H

Les valeurs propres de H sont les solutions de

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Comme $\Delta = (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$, on a deux valeurs propres réelles.

• $\Delta = 0$: dans ce cas, $a = c \neq 0$ avec $b = 0$ et l'équation de la conique s'écrit

$$ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

équation d'un cercle[1].

• $\Delta > 0$: dans ce cas, on a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2.

Remarquons que tout vecteur propre C_1 de valeur propre λ_1 est orthogonal à tout vecteur propre C_2 de valeur propre λ_2.

En effet, on a $HC_1 = \lambda_1 C_1$ et $HC_2 = \lambda_2 C_2$. Dès lors, $\widetilde{C_2}HC_1 = \lambda_1\widetilde{C_2}C_1$ et $\widetilde{C_1}HC_2 = \lambda_2\widetilde{C_1}C_2 \Leftrightarrow \widetilde{C_2}HC_1 = \lambda_2\widetilde{C_2}C_1$. En soustrayant membre à membre, on a donc $(\lambda_1 - \lambda_2)\widetilde{C_2}C_1 = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\widetilde{C_2}C_1 = 0$.

Ainsi, $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ si la première colonne de U est le vecteur propre unitaire de H relatif à la valeur propre λ_1 et la deuxième le vecteur propre unitaire relatif à la valeur propre λ_2.

Dès lors, $\widetilde{X'}H'X' = \lambda_1\, x'^{\,2} + \lambda_2\, y'^{\,2}$; on a ainsi éliminé le terme en xy.

4 Réduction de l'équation générale

Pour obtenir l'équation canonique d'une ellipse ou d'une hyperbole, il faut encore faire disparaître de l'équation les termes en x et en y c'est-à-dire prendre pour X_0 la solution, si elle existe, du système $HX + B = 0$.
Le système linéaire $HX = -B$ admet une seule solution X_0 si et seulement si $\det(H) \neq 0 \Leftrightarrow b^2 \neq ac$. [2]
Dans ce cas, comme $HX_0 = -B$, $f' = -\widetilde{X_0}B + 2\widetilde{B}X_0 + f = \widetilde{B}X_0 + f$ et l'équation devient

$$\lambda_1\, x'^{\,2} + \lambda_2\, y'^{\,2} + f' = 0 \quad \text{avec} \quad f' = \widetilde{B}X_0 + f,$$

ce qui est l'équation canonique d'une ellipse si les valeurs propres sont de même signe, d'une hyperbole sinon.

[1] Ni ici, ni dans la suite, nous n'envisagerons les cas de dégénérescence.
[2] Comme $\det(H) = \det(H') = \lambda_1.\lambda_2$, le système $HX = -B$ admet une seule solution X_0 si et seulement si les valeurs propres de H sont non nulles.

Si $\det(H) = 0$ alors l'une des valeurs propres est nulle et l'autre vaut $a + c$ puisqu'on a alors $ac = b^2$ et donc $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - (a+c)\lambda$. Si on note λ_1 la valeur propre non nulle alors $H' = \mathrm{diag}(\lambda_1, 0)$ et $\widetilde{X'}H'X' = \lambda_1 \, x'^{\,2}$: il n'y a plus qu'un seul terme du second degré.

Si $\det(H) = 0$ le système $HX = -B$ est soit indéterminé (dans ce cas on obtient l'équation d'une conique dégénérée), soit impossible.

Si le système est impossible, on peut prouver que si C_1 est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_1 non nulle, la droite d'équation $(HX + B)\widetilde{\ } C_1 = 0$ intersecte la conique d'équation $\widetilde{X}HX + 2\widetilde{B}X + f = 0$ en un point simple.

Cette droite de vecteur directeur C_2 (puisque $\widetilde{C_2}\ C_1 = 0$) a une équation du type $X = X_0 + kC_2$ où k est un paramètre réel et on prouve que $\widetilde{B}C_2 \neq 0$. En effet, d'une part, comme $HC_2 = \lambda_2 C_2$ avec $\lambda_2 = 0$, on a $HC_2 = 0$. D'autre part, le système $HX = -B$ étant impossible, pour tout X_0 on a $HX_0 \neq -B \Leftrightarrow \widetilde{X_0}H \neq -\widetilde{B}$ et donc $\widetilde{X_0}HC_2 \neq -\widetilde{B}C_2 \Leftrightarrow 0 \neq -\widetilde{B}C_2$.

Dès lors, le système

$$\begin{cases} \widetilde{X}HX + 2\widetilde{B}X + f = 0 \\ (HX + B)\widetilde{\ } C_1 = 0 \end{cases}$$

possède une solution X_0 telle que $\widetilde{X_0}HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f = 0$ et $(HX_0 + B)\widetilde{\ } C_1 = 0$.

Ainsi, on a

$$\widetilde{B'} = (HX_0 + B)\widetilde{\ } U = (HX_0 + B)\widetilde{\ }(C_1, C_2) = ((HX_0 + B)\widetilde{\ } C_1, (HX_0 + B)\widetilde{\ } C_2) = (0, \widetilde{X_0}HC_2 + \widetilde{B}C_2) = (0, \widetilde{B}C_2)$$

et $2\widetilde{B'}X' = 2\widetilde{B}C_2 y'$; l'équation de la conique s'écrit alors $\lambda_1 x'^{\,2} + 2\widetilde{B}C_2 y' = 0$, équation d'une parabole.

$\boxed{\text{Exercices}}$

Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes :
1) $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 10x - 26y - 59 = 0$
2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 4y + 2 = 0$
3) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

a) En précisant le changement de repère orthonormé effectué, réduire les équations suivantes pour obtenir une équation canonique.
b) Dans le repère initial, donner
- les coordonnées du centre éventuel de la conique et de son (ses) sommet(s)
- les équations cartésiennes de son (ses) axe(s) de symétrie et de ses éventuelles asymptotes.