1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 1

Version 4 février 2011 (V1 : 23/01/2010)

Préambule

Cette liste concerne
– quelques exercices de rappel de notions de base fondamentales (trigonométrie, calcul intégral, équations différentielles)
– une introduction à la manipulation des fonctions de plusieurs variables (domaine de définition, représentation, dérivation, ...)
– l'intégration des fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

Exercices de rappel

1. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut

$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A - 0,78).0,22}$$

Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

2. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5 - x)(0,25 - x)}$$

Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

3. En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à 17 % de la quantité initiale.
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

4. Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle

$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2} \sin^2 \theta - \cos \theta,\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$$

où n est un paramètre réel. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions d'équilibre du système.

5. Déterminer l'aire de la surface du plan dont une représentation analytique est donnée ci-dessous. En la hachurant, représenter cette surface dans le plan muni d'un repère orthonormé.

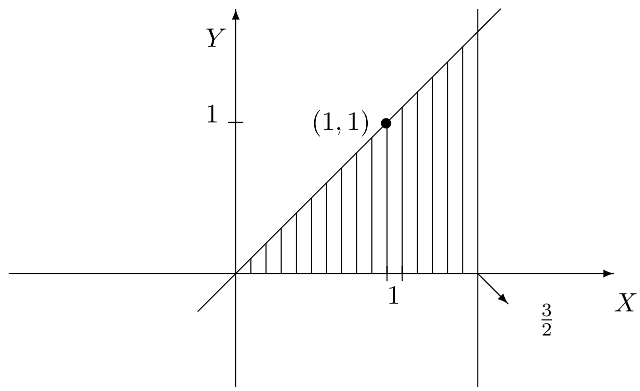
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, \pi], \ \sin x \leq y \leq |\cos x|\}$$

6. Pour toutes les valeurs du réel strictement positif r, déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$I(r) = \int_0^r \ln x \ dx.$$

   Pour quelle(s) valeur(s) de r cette intégrale est-elle nulle ? Interpréter graphiquement la réponse.

7. Déterminer une représentation analytique de l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)

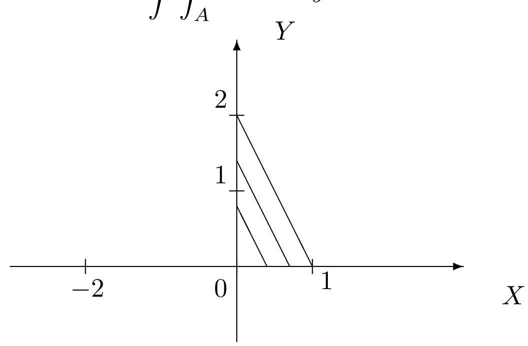


Fonctions de plusieurs variables

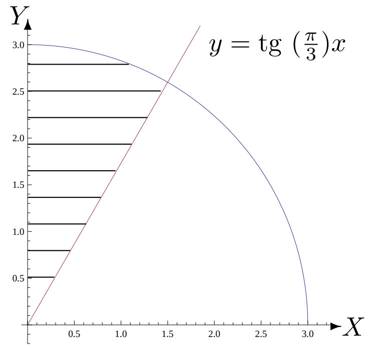
1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.
$$f(x,y)=\ln\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right),\quad g(x,y)=\sqrt{|2x-y|-1}.$$
2. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+4y^2-z^2=1$ dans le plan d'équation $z=0$. Comment appelle-t-on une telle courbe ?
3. On donne les fonctions f et g par
$$f(x,y)=\ln(x^2-1-3y),\quad g(x,y)=\sin(x^2y^3+5x).$$
a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.
4. On donne les fonctions f et g respectivement par
$$f(x,y)=\arccos\left(\frac{x}{y}\right)\qquad g(x,y)=\exp(\sqrt{x^2+y+1}).$$
a) Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilité de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_xf(x,y)+|y|D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t)=f\left(t,\frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t)=g(\sin t,\cos^2 t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
5. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]-4,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(2x+y,x-3y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ et $G(x,y)=g(\ln x,\ \arcsin(e^y))$.
6. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\cos(2x_3)$.
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z)=z^2e^{xy^3z}$.

Intégration de fonctions de plusieurs variables

1. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=y^2\sin(xy)$ sur $A=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.
b) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x+y$ sur $A=\{(x,y)\ :\ 0\le y\le\inf\{x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.
c) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=\cos(2x+3y)$ sur $A=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$.
2. Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble borné fermé hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum
$$\int\int_A e^{x+y}dxdy$$



3. Calculer $\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}dx\ dy$ où A est l'ensemble hachuré ci dessous.



4. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.

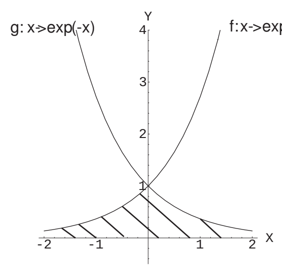
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon R (R réel strictement positif).

5. a) Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan des axes X, Y. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.
b) Déterminer le volume du corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation cartésienne $x + 2y + 3z = 6$.

6. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a)\ \int_{-2}^{3}\left(\int_{-1}^{x/2} f(x,y)dy\right)dx, \qquad b)\ \int_{0}^{2\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)dx\right)dy.$$

7. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x + y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



8. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\ dy\right)dx, \quad b)\int_0^1\left(\int_y^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\ dx\right)dy, \quad c)\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\ dy\right)dx$$

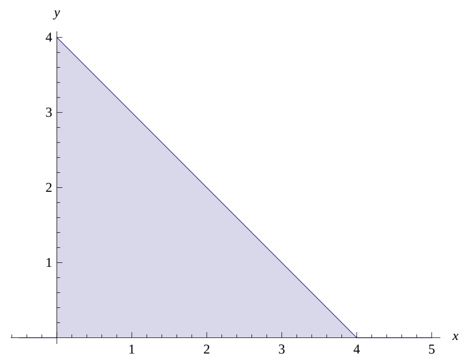
9. (Tous sauf biologistes et géologues) La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \int\int_R \delta(x, y) dx dy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent 4 m. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) quelle est la masse de cette plaque ?

b) en quelles unités s'exprime la constante K ?



1. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)