1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 3 bis

Version 3 mars 2011 (V1 : 07/03/2010)

Préambule Cette liste concerne les **approximations polynomiales, suites et séries**

REMARQUE pour cette liste
- Les biologistes ne sont plus concernés.
- Plusieurs exercices seront faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.
- S'il n'y a pas assez de temps, les géologues peuvent ne pas être concernés.

Exercices

1. Etudier la convergence de la suite q^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ en fonction de la valeur du paramètre réel q.
2. Les suites suivantes convergent-t-elles ? Si oui, quelle est leur limite ?
$$x_m = \sum_{\zeta=3}^{m} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq 3), \quad y_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j(j+1)} \quad (m \in \mathbb{N}_0), \quad z_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{j}{m^2} \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$
3. Etudier la convergence des séries suivantes (signaler le critère des séries alternées)
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2m)}{m^2}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{5m+1}}{m} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{4m}}{\sqrt{6m+9}}, \quad \sum_{m=4}^{+\infty} (\cos\sqrt{2})^m.$$
4. Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.
$$\sum_{m=2}^{+\infty} (-3)\left(\frac{3}{2}\right)^m, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{-m} \frac{2^m}{3^{m+2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{n!}, \quad \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - 3m + 2}.$$
5. Illustrer par un exemple le fait que *si la série* $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$ *converge et si la série* $\sum_{m=1}^{+\infty} |x_m|$ *ne converge pas, alors on ne peut pas impunément grouper les termes de la première sans changer la limite.*
Exemple avec la série harmonique alternée : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots \ \to \ln 2$ et
$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots \\ = \quad & \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) \\ \to \quad & \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$
6. Perdu dans le désert, en panne de gps et de toute batterie (calculette etc), un explorateur est amené à établir son itinéraire en se servant de carte, des « vieux » moyens et de ses connaissances de base de « calculus ». Il est amené à estimer la valeur du cosinus d'un angle de mesure égale à 20 degrés. Il souhaite avoir cette estimation avec une erreur strictement inférieure à un millième.
Comment peut-il procéder ?