Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste de révision sur les fonctions de plusieurs variables

Version 7 avril 2011 (V1 : 05/04/2011)

$\boxed{\textbf{Exercices}}$

1. Dans chacun des cas suivants, représenter dans un repère orthonormé les courbes de niveau d'équation $f(x, y) = c$ si

   a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $c = -1$ et -4 b) $f(x, y) = x^2 - y$ avec $c = -2$ et 0

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter graphiquement les surfaces dont voici l'équation cartésienne

   a) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$ b) $x^2 + y^2 = 1$

3. Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \sin\left(\dfrac{3x}{2 - y}\right)$.

4. Soient $f : (x, y) \mapsto \arcsin(\sqrt{1 - x^2y^2})$ et $g : (x, y) \mapsto \arcsin(xy)$.
   a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de ces fonctions et représenter ces domaines graphiquement.
   b) Calculer les dérivées partielles de ces fonctions.
   c) Vu les items a) et b), comparer ces fonctions ?

5. Montrer que
   a) la fonction $f : (x, y) \mapsto e^x \sin(y)$ vérifie l'équation $D_x^2 f + D_y^2 f = 0$.
   b) la fonction $g : (x, y) \mapsto \sin^2(x)\cos(y)$ vérifie l'équation $D_x D_y g = D_y D_x g$.

6. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires et on a $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que

$$(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(D_\theta F)^2.$$

7. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes après avoir représenté graphiquement l'ensemble A d'intégration

$$a) \int_1^e \left(\int_0^{\ln(y)} e^x \, dx\right) dy \qquad b) \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + y)(1 + x^2y^2)} \, dx\right) dy$$

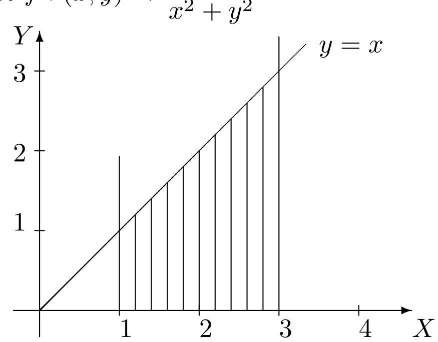
$$c) \int\int_A x\sqrt{4y^2 - x^2} \, dx \, dy \quad \text{si} \quad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in \left[-1, -\frac{x}{2}\right]\right\}$$

$$d) \int\int_A x^2 y \, e^{xy} \, dx \, dy \quad \text{si} \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in [0, 2]\}$$

$$e) \int\int_A \frac{1}{x} \, dx \, dy \quad \text{si} \quad A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

8. Calculer l'aire de la partie hachurée A puis l'intégrale sur A de la fonction f si

   a) A est représenté ci-dessous et $f : (x, y) \mapsto \dfrac{2}{x^2 + y^2}$



b) A est représenté ci-dessous et $f : (x, y) \mapsto x^2$.