1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Préparation à l'interrogation du 29 avril 2011

Version 24 mars 2011 (V1 : 22/03/2011)

Exercices

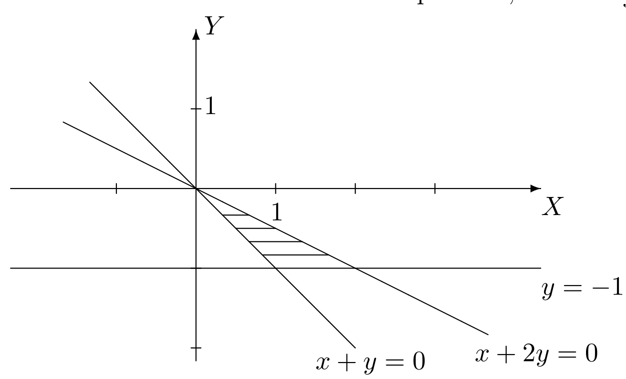
1. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = 1 - x^2 + 2xy$. Par application de la définition, prouver que f est dérivable par rapport à x en $(2, -3)$ et donner la valeur de la dérivée en ce point.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[\times]-6, 11[$.
   - Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2 + 2)$
   - Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   - Si c'est possible, que vaut celle-ci en $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

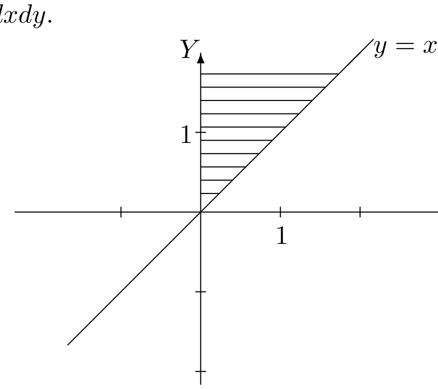
3. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.
   - Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de f.
   - Calculer $D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y)$.

4. Soit $g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \sin(ax)\sin(by)$ avec $a, b \in \mathbb{R}_0$. Si c'est possible, calculer l'expression $D_x^2 g(x, y) - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 g(x, y)$.

5. On donne l'ensemble fermé A hachuré ci-dessous. Si c'est possible, calculer $\int\int_A xy \; dxdy$.



6. On donne l'ensemble fermé non borné A hachuré ci-dessous et $f(x, y) = e^{-y^2}$. Si c'est possible, calculer $\int\int_A f(x, y) \; dxdy$.



7. Si c'est possible, calculer

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{1} \sin(y^2) \; dy \right) dx.$$

8. Si c'est possible, calculer l'intégrale de

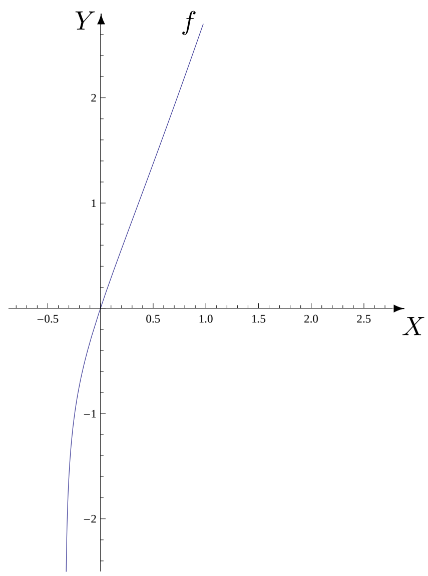
$$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

sur l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq 4 - y^2,\ y^2 \leq 16 - x^2,\ x \leq y \leq -x\}$.

9. Déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0,1 et 2 en 0 de la fonction

$$f(x) = (x+1)\ln(3x+1), \qquad x \in]-\frac{1}{3}, +\infty[.$$

Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté ci-dessous.



10. La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est la constante de gravitation.

– Sachant que $\operatorname{th} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.
– Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon le mois dernier avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?