ANALYSE II, 2010-2011, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 10 janvier 2011— Solutions (résumé)
Version: January 11, 2011 (V1: 01/01/11)

THEORIE

Question 1
(a) Enoncer ce que l'on appelle *représentation intégrale de Cauchy d'une fonction holomorphe et de ses dérivées.* Les hypothèses et notations doivent être clairement exprimées.
(b) Enoncer et démontrer le *théorème de Liouville* relatif à la caractérisation des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ avec bornation "polynomiale". Les hypothèses et les résultats utilisés dans la preuve doivent être clairement exprimés.

Question 2
Dans le cadre de la transformation de Fourier des fonctions intégrables dans $\mathbb{R}$, énoncer la propriété appelée *Théorème de transfert.*

Solution: voir cours et notes de cours.

EXERCICES

Question 1
1.1) On fixe un repère orthonormé de l'espace. On considère la surface $\mathcal{S}$ constituée des points de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1, dont les coordonnées cartésiennes sont positives et telles que l'abscisse soit supérieure ou égale à l'ordonnée, soit, analytiquement:

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0,\ x\geq y\right\}.$$

On considère aussi la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z)=[x,z+x,z]$.
(a) Représenter la surface $\mathcal{S}$.
(b) Déterminer un paramétrage injectif régulier de la surface $\mathcal{S}$.
(c) En spécifiant l'orientation que vous choisissez, déterminer la valeur de l'expression

$$\int\int_{\mathcal{S}} rot(\vec{f})\bullet\vec{n}\ d\sigma$$

où $\vec{n}$ désigne la normale unitaire à la surface orientée.

1.2) On fixe un repère orthonormé du plan et on considère la courbe d'équation cartésienne

$$4x^2+y^2=4.$$

(a) Représenter la courbe dans un repère orthonormé.
(b) Si $\mathcal{C}$ désigne la partie de la courbe située dans le quatrième quadrant, déterminer la valeur de l'intégrale suivante, en spécifiant l'orientation que vous choisissez

$$\int_{\mathcal{C}} xdy$$

Solution 1.1) (a) et (b) : la surface est une partie de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1; un paramétrage injectif et régulier de cette surface est donné par

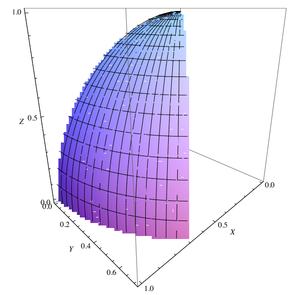
$$\vec{\phi}(\varphi,\theta)=[\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)],\quad \varphi\in[0,\pi/4],\theta\in[0,\pi/2].$$

Il s'ensuit qu'un vecteur normal à $\mathcal{S}$ au point de paramètres φ,θ est

$$\vec{N}(\varphi,\theta)=D_\varphi\vec{\phi}(\varphi,\theta)\wedge D_\theta\vec{\phi}(\varphi,\theta)=-\sin\theta\ [\cos\varphi\ \sin\theta,\sin\varphi\ \sin\theta,\cos\theta].$$

Ce vecteur est orienté “vers le sens de la concavité” (ie vers “l’intérieur” de la sphère).

Une représentation de la surface est la suivante



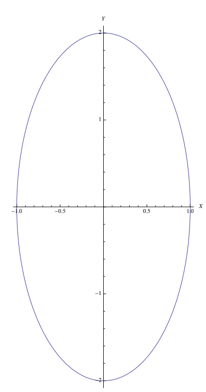
(c) Un calcul direct de rotationnel (en utilisant la définition) donne

$$(rot\vec{f})(x,y,z) = [-1,0,1].$$

Cela étant, en utilisant la définition d’une intégrale sur une surface ainsi que l’orientation définie par la normale ci-dessus (auquel cas $\vec{n} = \frac{\vec{N}(\varphi,\theta)}{\|\vec{N}(\varphi,\theta)\|}$), on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} [-1,0,1] \bullet \vec{N}(\varphi,\theta)\ d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} \left(\cos\varphi\ \sin^2\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\ d\varphi d\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/4} \cos\varphi\ d\varphi\right)\ \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\ d\theta\right)\ -\ \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\ d\theta \\
&= \left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/4}\ \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\ d\theta\right)\ +\ \frac{\pi}{16}\left[\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\pi}{4}\ -\ \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{\pi}{8}\ \left(\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$

Solution 1.2) (a) La courbe d’équation cartésienne $4x^2 + y^2 = 4$ est l’ellipse centrée à l’origine, de grand axe Y représentée ci-dessous



(b) Un paramétrage régulier injectif de la courbe $\mathcal{C}$ orientée dans le sens contraire des aiguilles d’une montre est le suivant

$$\begin{cases} x = x(t) = \cos t \\ y = y(t) = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

En utilisant la définition des intégrales curvilignes, on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} xdy = \int_{-\pi/2}^{0} x(t)D_t y(t)\ dt = \int_{-\pi/2}^{0} 2\cos^2 t\ dt = \int_{-\pi/2}^{0} (1+\cos(2t))\ dt = \frac{\pi}{2}$$

D'autres possibilités de paramétrage peuvent bien sûr être utilisées. En voici deux exemples.
- (i) $x = x,\ y = y(x) = -\sqrt{4-4x^2}$, $x \in [0,1]$;

$$\int_{\mathcal{C}} x dy = \int_0^1 x D_x y(x)\ dx = 4 \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-4x^2}} dx = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

- (ii) $x = \sqrt{1-y^2/4},\ y = y$, $y \in [-2,0]$;

$$\int_{\mathcal{C}} x dy = \int_{-2}^0 x(y)\ dy = \int_{-2}^0 x(y)\sqrt{1-y^2/4}\ dy = \ldots = \frac{\pi}{2}$$

Question 2

2.1) On donne les fonctions f , g et l par

$$f(z) = e^{1/z^2}, \qquad g(z) = \frac{1-\cos z}{z^4}, \qquad l(z) = \frac{\sin(\pi z)}{1-z^2}$$

(a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
(b) Quels sont leurs zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
(c) Quelles sont les singularités isolées? De quels types sont-elles?
(d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
(e) Déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

Solution. Cas de la fonction f.

(a) La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0 car sa limite en 0 n'est pas finie[5].

(b) La fonction f n'a pas de zéro car la fonction exponentielle ne s'annule pas.

(c), (d), (e) Vu ce qui précède, la seule singularité isolée de f est 0. De plus, en utilisant la définition de la fonction exponentielle, on a directement le développement

$$f(z) = 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!}\ \frac{1}{z^{2m}},\ z \neq 0$$

donc le développement de Laurent est

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z}\right), z \neq 0 \qquad \text{avec} \quad h(z) = 1,\ H(Z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Z^{2m}}{m!}.$$

Il s'ensuit que 0 est singularité essentielle (car H n'est pas un polynôme) pour f et que le résidu de f en 0 est nul (car le coefficient de Z dans H est nul).

Cas de la fonction g.

(a) Vu son expression, la fonction g est holomorphe dans $\mathbb{C}_0$. De plus, à partir du développement en série de Taylor de la fonction cosinus en 0, on a

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + z^6\ G(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

avec G holomorphe dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que

$$g(z) = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4!} - z^2 G(z), \quad z \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi $\lim_{z\to 0} g(z) = \infty$, ce qui implique que g ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0.

(b) Les zéros du numérateur sont les nombres $z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ car on a $\cos z = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2k\pi$. De plus, ces zéros sont de multiplicité 2 car $D(1-\cos z)|_{z=z_k} = \sin z_k = 0$ et $D^2(1-\cos z)|_{z=z_k} = \cos z_k = 1$. Pour tout entier non nul k, on peut donc écrire

$$g(z) = (z-z_k)^2 \frac{Q(z)}{z^4}, \quad z \in \mathbb{C}_0$$

[5] en fait, elle n'existe pas car, par exemple, $\lim_{z\to 0, z\in\mathbb{R}} f(z) = +\infty$, $\lim_{z\to 0, iz\in\mathbb{R}} f(z) = 0$

avec $z \mapsto Q(z)/z^4$ holomorphe au voisinage de z_k et $Q(z_k)/z_k^4 \neq 0$. Les zéros de g sont donc les nombres $z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}_0$ et ils sont chacun de multiplicité 2.

(c), (d), (e) Vu ce qui précède, la seule singularité isolée de g est 0. De plus, en utilisant le développement de Taylor de la fonction cosinus (cf ci-dessus), on a

$$g(z) = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4!} - z^2 G(z), \quad z \in \mathbb{C}_0$$

avec G holomorphe dans $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que le développement de Laurent est

$$g(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z}\right), z \neq 0 \qquad \text{avec} \quad h(z) = -\frac{1}{4!} - z^2 G(z),\ H(Z) = \frac{Z^2}{2}.$$

Il s'ensuit que 0 est un pôle d'ordre 2 pour g (car H est un polynôme de degré 2) et que le résidu de g en 0 est nul (car le coefficient de Z dans H est nul).

Cas de la fonction l.

(a) Vu son expression, la fonction l est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. De plus, on a

$$\lim_{z \to -1} l(z) = \lim_{z \to -1} \frac{\sin(\pi z) - \sin(-\pi)}{(z - (-1))\ (1 - z)} = \frac{1}{2} D \sin(\pi z)|_{z=-1} = \frac{\cos(-\pi)}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{z \to 1} l(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\sin(\pi z) - \sin(\pi)}{(z + 1)\ (1 - z)} = -\frac{1}{2} D \sin(\pi z)|_{z=1} = -\frac{\cos(\pi)}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

donc l se prolonge en une fonction holomorphe en -1 et 1.

(b) Les zéros du numérateur sont les entiers; ceux-ci sont de multiplicité 1 (pour le numérateur) car $D \sin(\pi z)|_{z=k} = \pi \cos(k\pi) \neq 0$ quel que soit l'entier k. Cela étant, comme $\lim_{z \to \pm 1} l(z) \neq 0$ (cf ci-dessus), les entiers -1 et 1 ne sont pas des zéros de l. Par contre, tout autre entier k est un zéro de multiplicité 1 pour l car au voisinage de k, on peut écrire

$$l(z) = \frac{(z - k)L(z)}{1 - z^2}$$

avec $z \mapsto L(z)/(1 - z^2)$ holomorphe au voisinage de l'entier k et $L(k)/(1 - k^2) \neq 0$.

(c) Vu ce qui précède, il n'y a pas de singularité isolée. Les points (d) et (e) sont donc sans objet ici.

Question 2 (suite)

2.2) Soit γ le bord du carré centré à l'origine, de côtés parallèles aux axes et de longueur de côté égale à 2. On considère qu'on parcourt ce bord "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\Re\left(\int_\gamma z\ dz\right),\ \int_\gamma \Im z\ dz,\ \int_\gamma \Im(z - |z|)\ dz$$

2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante par "méthode de variables complexes"

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

Solution. 2.2) : voir l'examen du mois d'août 2009
2.3): voir notes de cours, autres questionnaires d'examen (et répétitions, cours de l'automne 2010 pour des calculs analogues)

Question 3

3.1) Déterminer les transformées de Fourier $(-, +)$ des fonctions f et g suivantes (en explicitant et justifiant les calculs qui y conduisent)

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}, \qquad g(x) = e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

3.2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} e^{-|x|} \; dx$$

3.3) Montrer que les fonctions u et v suivantes sont orthogonales dans $L^2([0, 2\pi])$

$$u(x) = e^{ix}, \qquad v(x) = e^{-ix}$$

Solution. 3.1) La fonction f est la fonction caractéristique d'un intervalle borné; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $y \neq 0$ on a alors

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = \int_{-1}^{1} e^{\pm ity} dt = 2 \int_0^1 \cos(yt) \; dt = 2 \left[\frac{\sin(yt)}{y} \right]_{t=0}^{t=1} = 2 \frac{\sin y}{y}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{F}_y^{\pm} f = \begin{cases} 2 & \text{si } y = 0 \\ 2\frac{\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 g(x) = 0$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela étant, pour tout réel y, on a successivement (en se servant encore de la parité de fonctions)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^{\pm} g &= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ixy} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-x} \; dx \\ &= 2\Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-x(1+iy)} \; dx \right) \\ &= 2\Re \left(\frac{1}{1+iy} \right) = \frac{2}{1+y^2}. \end{aligned}$$

3.2) Vu ce qui précède et en utilisant le théorème de transfert, on obtient directement

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} e^{-|x|} \; dx \; = \; \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_x f \; g(x) \; dx \; = \; \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \; \mathcal{F}_x g \; dx \; = \; \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3.3) Les fonctions données sont continues sur $\mathbb{R}$; elles sont donc de carré intégrable sur tout intervalle borné. Cela étant, en utilisant la défintion du produit scalaire dans $L^2([0, 2\pi])$, on a directement

$$< u, v >= \int_0^{2\pi} u(x) \overline{v(x)} \; dx = \int_0^{2\pi} e^{ix} e^{ix} \; dx = \left[\frac{e^{2ix}}{2i} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Question 4 Pourquoi l'affirmation suivante est-elle correcte?

Si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et telle que $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, alors f est identiquement nul.

Solution. Comme la limite de f à l'infini est nulle, il existe une constante $R > 0$ telle que

$$|f(z)| \leq 1 \; \forall z, \; |z| \geq R.$$

Par ailleurs, f est continu dans $\mathbb{C}$, donc borné sur toute boule. Il s'ensuit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|f(z)| \leq C \; \forall z \in \mathbb{C}.$$

Le théorème de Liouville (cf question de théorie de cet examen) permet donc de dire que f est constant. Comme sa limite est nulle à l'infini, cette constante est nulle. D'où la conclusion.