Analyse II

Liste ≪ type ≫ 1

Mardi 21 septembre 2010 (et mardi 28 septembre 2010)

REMARQUES pour les séances de répétitions
- A la répétition : exercices *.
- Voir aussi la liste 1 de 2006-2007 et 2007-2008 (disponible sur le web, y compris solutions) ; la présente liste est la même que celle de 2008-2009 et 2009-2010

Pour les NOTATIONS des vecteurs :
-chez EK : en gras (et souvent lettre minuscule) ; si un vecteur est donné par ses composantes, celles-ci sont séparées par des virgules, et entourées de crochets (les coordonnées de points sont entourées de parenthèses) ;
-au cours (et de façon naturelle chez plusieurs encadrants) : $\vec{v}$;
-provient de 1er bachelier : $\underline{v}$

Rappel A-DERIVATION

1. 1.1) (*) Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilté des fonctions f, g, h données explicitement ci-dessous. Représenter ces domaines.
   1.2) (*) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x g(x,y) + |y|D_y g(x,y)$.

$$f(x,y) = \ln\left(e^{x+y} - e^{\frac{1}{x-y}}\right), \quad g(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad h(x,y) = \sqrt{x^2+y+1}.$$

2. On donne la fonction g, dérivable sur $]1, +\infty[$ et de dérivée

$$g'(x) = Dg(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1.$$

   On pose ensuite

$$F(x) = g\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

   On demande de trouver où la fonction F est dérivable et de déterminer l'expression de sa dérivée.

3. 3.1) (*) Déterminer dans quel ensemble la fonction de deux variables suivante (notée f) est continûment dérivable

$$f(x,y) = \ln\left(16 - 4x^2 - 4y^2\right)$$

   et représenter graphiquement ce domaine (en le hachurant).
   - Déterminer l'expression explicite de la fonction F définie par

$$F(t) = f(t-1, t+1).$$

   - Déterminer le domaine de dérivabilité et l'expression explicite de la dérivée de F.
   3.2) On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-2, 3[\times]0, +\infty[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction $F \ : \ t \mapsto f(t^2 - 2t, e^{-t} - 1)$ et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f.

4. Exercice 1 p 403 EK

Rappel B-INTEGRATION à une, deux et trois variables

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si f_j (* :1,2,3,8,9) est intégrable sur A.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x},\ A = [-1, 1];\ f_2(x) = \frac{x}{\sin x},\ A = [-1, 1];\ f_3(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2},\ A = [0, +\infty[;$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{1 + x^3},\ A = [0, +\infty[;\ f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ A =]0, 1] \text{ et } A = [1, +\infty[;\ f_6(x) = e^{-|x|},\ A = \mathbb{R}$$

$$f_7(x) = \frac{x}{e^x - 1},\ A = [0, +\infty[;\ f_8(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ A =]0, 1];\ f_9(x) = e^{-ix},\ A = [0, +\infty[.$$

2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\left\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, e^x\}\right\}.$$

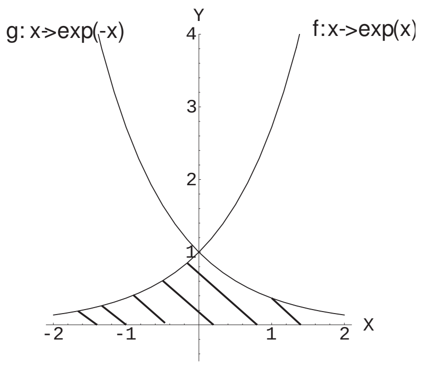
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
(*) Même question pour

$$\{(x, y) : x \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin x \leq y \leq \cos x\}.$$

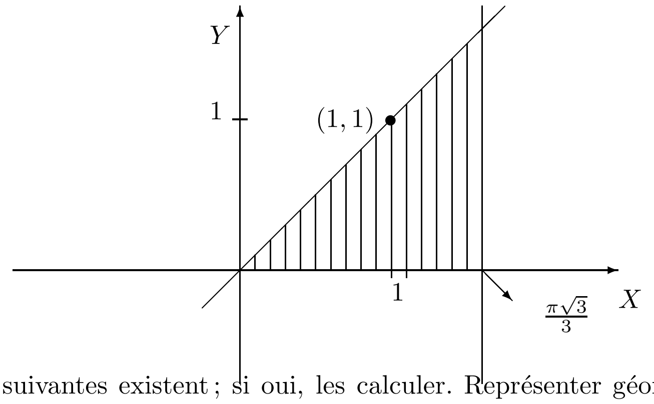
3. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a)\ \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{-x/2} f(x, y)dy\right)dx,\quad b)\ \int_{-1}^{0}\left(\int_{-3x-4}^{0} f(x, y)dy\right)dx\quad c)(*)\ \int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx\right)dy.$$

4. a) (*) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = y^2 \sin(xy)$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.
   b) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = \cos(x + y)$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$.
   c) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x + y$ sur $A = \{(x, y)\ :\ 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$.
5. On considère l'ensemble $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq y \leq \inf\{e^{-x}, \ln(x + e)\}\right\}$.
   Représenter graphiquement A.
   Ecrire l'intégrale $\int\int_A f(x, y)dxdy$ sous forme de deux intégrales successives par rapport à x puis à y (resp. par rapport à y puis à x).
6. a) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x + y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



b) (*) Calculer l'intégrale de $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$ sur l'ensemble borné, fermé hachuré suivant et donner une description analytique de cet ensemble



7. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y} dy \right) dx, \; b) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{e^{-x^2}}{x^2+y} dy \right) dx,$$

$$c) \int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2} dx \right) dy, \; d) \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y} dy \right) dx$$

8. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \leq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$.
   De même, calculer l'intégrale de $f(x,y) = x^3+y^3$ sur $A = \left\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ (a et b sont des réels strictement positifs) et donner une représentation graphique de A dans un repère orthonormé.
9. (*) Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement $1, 2$, centrés à l'origine et l'axe X. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = 1 + 3x + 8y^2$ sur A.
10. On demande de justifier l'existence et de calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} e^{\frac{y-x}{y+x}} dy \right) dx.$$

   (Ecrire cette intégrale comme une intégrale double et ensuite effectuer un changement de variables au moyen des relations $2x = u+v, \; 2y = u-v.$)
11. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

12. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

   (Suggestion : transformer $\ln x$ en une intégrale : $\ln x = \int_0^{+\infty} (\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}) dy$; permuter alors les intégrales.)
   En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ et de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$, puis la valeur de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ et de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}$.

13. Voir aussi les exercices résolus ou proposés aux pages 437-439 de EK
14. Application du théorème des intégrales paramétriques.
   14.1) (*) Soit un réel a et soit une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

   est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t) \; dt.$$

14.2) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x} e^{-px} dx$$

pour tous réels a, b et tout $p > 0$ (si p est complexe de partie réelle strictement positive, il s'agit en fait de la transformée de Laplace (en p) unilatérale de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}$).
14.3) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)-\arctan(bx)}{x} dx,\ (a,b>0); \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a)^n} dx,\ a>0, n \in \mathbb{N}_0.$$

14.4) Soit

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx, \quad t > -1.$$

- Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$.
- Calculer $F(0)$.
- Montrer que $DF(t) = \frac{1}{t+1}$.
- En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F.

Rappel C-CALCUL VECTORIEL

1. On fixe une base orthonormée de l'espace notée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et et on donne les vecteurs

$$\vec{u} = 3\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \quad \vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

   - dans la base donnée, déterminer les composantes de $2\vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{w}$ et de $\vec{u} \bullet \vec{v}\vec{w}$
   - déterminer la norme de $\vec{u} + 3\vec{v}$
   - déterminer la nature des expresssions suivantes (si elles ont un sens) ;

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \bullet \vec{w}, \quad \vec{v} \wedge (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{u}, \quad \vec{u} \bullet \vec{w}\ \vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w})\vec{u}, \quad (\vec{u} \wedge \vec{w}) \bullet \vec{u}$$

   - les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ou dépendants ? Pourquoi ?
   - si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement indépendants, déterminer les composantes de $\vec{e}_2$ dans la base qu'ils forment.

2. On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs $\vec{x}, \vec{v}$ respectivement de composantes $(1, 2, 2), (1, -1, 0)$.
   - Donner une représentation du vecteur $\vec{x}$.
   - Déterminer les composantes de la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$.
   - Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur le plan déterminé par les vecteurs de composantes $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Analyse II

Liste « type » 1

Solutions

La plupart des exercices sont ceux de la liste 1 de 2006-2007; les solutions aux exercices de cette liste sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be).

Ci-dessous sont présentées les solutions aux exercices qui figurent dans cette liste 1de 2009-2010 mais dans aucune de 2006-2007.

Note : la présente liste (2010-2011) est la même que la liste 1 de 2007-2008, 2008-2009, 2009-2010.

Exercice 1.1), fonction f

Les domaines de définition et d'infinie dérivabilité sont les mêmes. Il s'agit de l'ensemble

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>y \text{ et } x^2-y^2>1\right\}\ \cup\ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x<y \text{ et } x^2-y^2<1\right\}$$

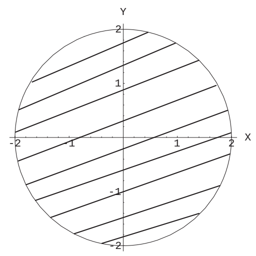
c'est-à-dire de l'union des deux ensembles suivants :
- l'ensemble des points du plan situés au-dessus de la première bissectrice (d'équation $x=y$) et “entre” les branches de l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $x^2-y^2=1$ (dont les asymptotes sont les droites d'équation $x=y$ et $x=-y$);
- l'ensemble des points du plan situés à droite de la branche de droite de cette même hyperbole.

Exercice 3.1)

La fonction est continûment dérivable dans

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 4>x^2+y^2\}$$

qui est la surface intérieure au cercle (circonférence) d'équation cartésienne $x^2+y^2=4$ (les points de cette circonférence n'étant pas compris dans l'ensemble).



L'expression explicite de F est

$$F(t)=\ln\left(16-4(t-1)^2-4(t+1)^2\right)=\ln\left(16-4t^2+8t-4-4t^2-8t-4\right)=\ln(8-8t^2)=3\ln 2+\ln(1-t^2)$$

La fonction F est dérivable dans $]-1,1[$ et, dans cet ensemble, on a

$$DF(t)=D\ln(1-t^2)=-2\frac{t}{1-t^2}.$$

Exercice 14.1)

Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec $A=]0,+\infty[$ comme ensemble d'intégration (variable notée t) et $\Lambda=]a,+\infty[$ comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté x).

Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate. Suggestion : si K est un compact inclus dans Λ, alors il existe $r>a$ tel que $K\subset[r,+\infty[$. Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt}f(t))|=te^{-xt}|f(t)|\le e^{-at}|f(t)|\ te^{-(r-a)t}\le Ce^{-at}|f(t)|\quad \forall x\in K,\ t>0.$$

Exercice 14.4)

Montrons que F est bien défini c'est-à-dire que $x \mapsto f(x,t) = \frac{x^t-1}{\ln x}$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $t > -1$.
- la fonction $f(.,t)$ est continue sur $]0,1[$
- intégrabilité en 1^- : le théorème de l'Hospital montre que $\lim_{x\to 1^-} f(x,t) = 1 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 1^-
- intégrabilité en 0^+ lorsque $t \geq 0$: on a $\lim_{x\to 0^+} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+
- intégrabilité en 0^+ lorsque $-1 < t < 0$: on a $\lim_{x\to 0^+} x^{-t} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème des intégrales paramétriques. Tout est direct, sauf peut-être l'estimation uniforme de la dérivée.
Suggestion : on a $D_t f(x,t) = x^t$. Majoration lorsque $t \in [r,0]$ avec $-1 < r < 0$: $\sup_{t\in[r,0]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq x^r \in L^1(]0,1[)$; majoration lorsque $t \in [0,R]$ avec $R > 0$: $\sup_{t\in[0,R]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq 1 \in L^1(]0,1[)$.

Les intégrales paramétrqiues donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t,x)\ dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + constante, \quad \forall t > -1.$$

Comme $F(0) = 0$, on trouve $constante = 0$ et finalement

$$\int_0^1 f(t,x) dx = \ln(t+1), \quad \forall t > -1.$$