Analyse II

Liste "type" 2

Mardi 28 septembre 2010-mardi 05 octobre 2010

REMARQUES pour les séances de répétition
- Références: notamment *Erwin Kreyzsig* (de 9.4 à 9.9)
- A la répétition: exercices *

ANALYSE VECTORIELLE, 1ère PARTIE (manipulations algébriques, géométriques et dérivation)

1. Soient $\vec{F}, \vec{G}$ des fonctions à valeurs vectorielles en la variable réelle u et soit ϕ une fonction scalaire de la variable réelle u. On suppose que ces fonctions sont dérivables dans le même intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Dans cet intervalle,
(i) (*) établir la formule
$$D_u(\vec{F} \bullet \vec{G}) = (D_u\vec{F}) \bullet \vec{G} + \vec{F} \bullet (D_u\vec{G})$$
et déduire qu'un vecteur de norme constante est orthogonal à sa dérivée;
(ii) établir la formule
$$D_u(\phi\vec{F}) = \phi D_u\vec{F} + (D_u\phi)\vec{F}.$$

2. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle $\vec{R}$ par
$$\vec{R}(t) = \cos t\ \vec{e}_1 + \sin t\ \vec{e}_2 + t\ \vec{e}_3.$$
a) Déterminer
$$(*)D_t\vec{R}, \quad (*)D_t^2\vec{R}, \quad \left\|D_t\vec{R}\right\|, \quad (*)D_t\vec{R} \wedge D_t^2\vec{R}.$$
b) (*) Esquisser la courbe décrite par l'extrémité P du vecteur lié $\vec{OP}(t) = \vec{R}(t)$, $t \geq 0$ et représenter le vecteur tangent à la courbe aux points de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

3. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle $\vec{F}(u, v) = u \sin v\ \vec{e}_1 + v \cos u\ \vec{e}_2 + u\vec{e}_3$. Déterminer l'expression explicite des fonctions suivantes (à valeurs scalaires ou vectorielles)
$$D_u\vec{F} \bullet D_v\vec{F}, \quad D_u\vec{F} \wedge D_v\vec{F}.$$

4. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Une particule se déplace de telle sorte qu'à l'instant t, le vecteur position $\vec{r}$ est donné par $\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\vec{e}_1 + \sin(\omega t)\vec{e}_2$, où ω est une constante.
(i) Montrer qu'à tout instant, la vitesse $\vec{v}$ de la particule est orthogonale au vecteur position.
(ii) Montrer qu'à tout instant, l'accélération de la particule est dirigée vers l'origine et a une norme proportionnelle à la distance à l'origine.
(iii) Montrer que la fonction vectorielle $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant.
(iv) Interpréter géométriquement les résultats.

5. (* En faire au moins un; suggérer les autres) On suppose que la température est donnée en tout point du plan par le champ scalaire $T(x, y) = xy$. Déterminer les isothermes de ce champ (ce sont des courbes du plan; en préciser aussi la nature), le vecteur formé des dérivées partielles (ie le gradient du champ) et en donner une représentation graphique.

   Même question pour $T(x, y) = x^2 - y^2$, $T(x, y) = x^2 - 4x + y^2$, $T(x, y) = x^2 + y^2/4$.

   Déterminer également une représentation paramétrique de chacune de ces courbes

6. a) Esquisser une représentation graphique du champ vectoriel $\vec{v}(x,y) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ (la notation $\vec{e}_j$ ($j = 1,2$) désigne les vecteurs d'une base orthonormée du plan).

   b) cf en 1er bachelier: voir aussi par exemple le problème des fourmis.

   Supposons que $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$ soit le vecteur position d'une particule à l'instant t et que sa vitesse soit donnée par le champ $\vec{v}$ ci-dessus ($D\vec{r} = \vec{v}$). Quelles courbes décrit la particule au cours du temps? Représenter graphiquement celles-ci (en fonction de conditions initiales), sur le même dessin que le champ $\vec{v}$.

   Même question pour
$$\vec{v}(x,y) = y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2, \quad \vec{v}(x,y) = y\vec{e}_1 - x\vec{e}_2$$
$$\vec{v}(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad \vec{v}(x,y) = x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2, \quad \vec{v}(x,y) = 4y\vec{e}_1 - x\vec{e}_2.$$

ANALYSE VECTORIELLE, 1ère PARTIE, suite (gradient, divergence, rotationnel)

Rappels:
- rotationnel (rot ou curl) et divergence (div) d'un champ vectoriel; gradient (grad) d'un champ scalaire
- le *gradient* est aussi appelé opérateur "nabla", noté $\vec{\nabla}$ ou même parfois simplement ∇
- le *laplacien* est l'opérateur (du second ordre) $div(grad)$; il est noté Δ; on a donc (si trois variables réelles): $\Delta f = D_x^2 f + D_y^2 f + D_z^2 f$

Remarquons qu'avec ces notations, on peut aussi écrire (symboliquement)
$$div\vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}, \quad rot\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \quad \Delta f = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} f (\text{parfois noté } = \vec{\nabla}^2 f).$$

1. On donne les champs vectoriel et scalaire suivants
$$\vec{r}(x,y,z) = [x,y,z], \quad r(x,y,z) = \|\vec{r}(x,y,z)\|.$$
   Déterminer
   (i) le rotationnel du champ vectoriel $\vec{r}$
   (ii) le gradient du champ scalaire $1/r$
   (iii*) le gradient du champ scalaire $\vec{r} \bullet \vec{r}$
   (iv*) le gradient de la divergence des champs vectoriels $\vec{r}$ et $r\vec{r}$.

   Si $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ est un vecteur constant, déterminer également
   (v) le rotationnel du champ $\vec{a} \wedge \vec{r}$
   (vi) le gradient du champ $\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|$.

2. Déterminer le gradient du champ scalaire f, la divergence du champ vectoriel $\vec{C}$ et le rotationnel du champ $\vec{D}$ (la notation $\vec{e}_j$ ($j = 1,2,3$) désigne les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace).
$$f(x,y) = xye^y, \quad \vec{C}(x,y,z) = \arctan(x^2+y^2)\vec{e}_1 + z\vec{e}_2, \quad \vec{D}(x,y,z) = y^2\vec{e}_1 + xz\vec{e}_2 + xyz\vec{e}_3.$$

3. Sur les exemples suivants, vérifier que le rotationnel du gradient d'un champ scalaire régulier est nul et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel régulier est nul.
$$(*) H(x,y,z) = \cos(xyz), \quad \vec{f}(x,y,z) = [x^2 y, x^2 z^4, e^{xyz}].$$

4. Les opérations suivantes ont-elles un sens? Si oui, définissent-elles un champ scalaire ou un champ vectoriel?
   (i) Gradient de la divergence d'un champ vectoriel
   (ii) Gradient de la divergence d'un champ scalaire
   (iii) Divergence du gradient d'un champ scalaire
   (iv) Divergence du gradient d'un champ vectoriel
   (v) Divergence de la divergence d'un champ scalaire
   (vi) Divergence du gradient d'un champ scalaire
   (vii) Rotationnel de la divergence d'un champ vectoriel

5. Déterminer la dérivée dans la direction $\vec{h}$ du champ scalaire f au point P *(Il s'agit en fait simplement de calcul de différentielle, dans laquelle on met bien en évidence l'intervention du gradient).*

$$f(x,y,z) = xyz, \quad P(-1,1,3), \quad \vec{h} = [1,-2,2].$$

6. a) (*) A propos du gradient: EK p409, exercices 13 et 14. Esquisser également les isothermes.

   b) (EK p 413) Reprendre les exemples de champ $\vec{v}$ de l'exercice 6 (première partie de cette liste 2).

   Supposons que le champ $\vec{v}$ représente la vitesse du courant d'un fluide et que l'on examine ce qui se passe dans un carré centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes. Si $D_t x = v_1$ et $D_t y = v_2$, déterminer les courbes $(x(t,)y(t))$ le long desquelles se déplacent les particules (ie intégrer le champ $\vec{v}$). Peut-on prévoir le signe de la divergence du champ en un point du bord du carré?

   Déterminer explicitement la divergence de ce champ.

   Déterminer aussi le rotationnel de ce champ (avec 0 en guise de troisième composante du champ).

7. Montrer que l'opérateur $\big(grad(div) - rot(rot)\big)\,. = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet .) \; - \; \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge .)$ qui s'applique à un champ vectoriel pour donner un champ vectoriel est tel que

$$\big(grad(div) - rot(rot)\big)\,\vec{f} = [\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3] \qquad \text{où} \qquad \vec{f} = [f_1, f_2, f_3].$$

8. (*) Les champs électrique $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$ et magnétique $\vec{H} = \vec{h}(x,y,z,t)$ vérifient les équations de Maxwell suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} \bullet \vec{E} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{H} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} & = & -\frac{1}{c} D_t \vec{H} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} & = & \frac{1}{c} D_t \vec{E} \end{array}\right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl} div\vec{E} & = & 0 \\ div\vec{H} & = & 0 \\ rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c} D_t \vec{H} \\ rot\vec{H} & = & \frac{1}{c} D_t \vec{E} \end{array}\right.$$

   Montrer que ces champs (en fait chaque composante de chacun d'eux) vérifient également l'équation des ondes, à savoir

$$\left(\frac{1}{c^2} D_t^2 - \Delta\right) \vec{u} = \vec{0}.$$

9. Sous certaines hypothèses, on sait qu'un champ vectoriel est irrotationnel[1] si et seulement s'il dérive d'un potentiel scalaire[2] et qu'un champ vectoriel est indivergentiel[3] si et seulement s'il dérive d'un potentiel vecteur[4].

   - (*) Montrer que le champ vectoriel $\vec{f}(x,y,z) = [x, 4y, -z]$ admet un potentiel scalaire. Le déterminer. Est-il unique?
   - Montrer que le champ vectoriel $\vec{f}(x,y,z) = \frac{[x,y,z]}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ admet un potentiel scalaire dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ qui s'annule à l'infini et calculer celui-ci.
   - Soit $\vec{a}$ un vecteur constant et soit $\vec{r}$ le champ vectoriel $[x,y,z]$. Montrer que le champ vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{r}$ admet un potentiel vecteur et le calculer.

FB, September 25, 2010(V1:01-08-07)

[1] ie son rotationnel est nul
[2] ie il est égal au gradient d'un potentiel scalaire
[3] ie sa divergence est nulle
[4] ie il est égal au rotationnel d'un champ vectoriel

Analyse II

Liste "type" 2

Solutions

Liste 2 de 2010-2011:
exercices de 2008-2009 un peu amendée (*)

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 2 de 2007-2008, 2006-2007).