Analyse II

Liste "type" 8

Mardis 23-11-10 et 30-11-10

REMARQUES pour les séances de répétition
- A la répétition: exercices *
- **Attention: TD prévu le mardi 7 décembre 2010**–liste d'exercices à préparer: voir pages web

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

RESULTAT AUXILIAIRE (prolongements holomorphes)

Etant donné une fonction holomorphe définie de façon naturelle (souvent explicitement, analytiquement) dans un ouvert de $\mathbb{C}$, il est utile d'essayer de trouver une fonction holomorphe qui la prolonge dans un ouvert plus grand.

Par exemple, la fonction $\sqrt{1-z^2} := (1-z)^{1/2}(1+z)^{1/2}$ est définie de façon naturelle dans $U = (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\cup]-1,1[$ et y est holomorphe. Elle étend la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in]-1,1[$.
La fonction $\sqrt{z^2-1} := (z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}$ est aussi définie de façon naturelle dans le complémentaire de $[-1,+\infty[$ ou dans le complémentaire de $]-\infty,1]$. On peut l'étendre dans le complémentaire du segment $[-1,1]$, ce qui donne alors une extension holomorphe à la fonction $\sqrt{x^2-1}$, $x>1$ par exemple.

Plus précisément, on a le résultat suivant (il en existe d'autres; ils sont basés sur le calcul d'arguments).

Soient $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}$, $a<b$, et soient

$$f(z) = Ln(z-a) - Ln(z-b), \quad g(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}.$$

Chacune de ces fonctions est définie et holomorphe dans le complémentaire d'une demi-droite. Chacune peut se prolonger holomorphiquement dans le complémentaire du segment $[a,b]$.

EXERCICES

1. (*) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées des fonctions 1,2,3,4,8 de l'exercice 5, liste 7 de 2009-2010.

2. EK, p 717 : de 3 à12

3. EK, p 717 : de 14 à 25

4. Soit $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ $(r>1)$ et soit $\sqrt{z^2-1} := \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ (avec détermination principale de l'argument). Montrer que
$$I_r = \int_{\gamma_r} \sqrt{z^2-1}\, dz = -i\pi.$$
Suggestion. La fonction $f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$ (notée $\sqrt{z^2-1}$) est holomorphe dans $\Omega := \mathbb{C}\setminus[-1,1]$.
Méthode 1. La fonction $F(z) = \sqrt{1+z}\sqrt{1-z}$ est holomorphe dans le complémentaire de $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ et on a $f(z) = zF(1/z)$ dans Ω. On obtient $I_r = ir\int_0^{2\pi} dt\ e^{it} f(re^{it}) = \int_{\gamma_{1/r}} dz\ \frac{F(z)}{z^3} = i\pi D^2F(0) = -i\pi$.
Méthode 2. Au signe près, l'intégrale à calculer est égale à l'intégrale de la même fonction sur le contour "en haltères" autour de -1 et de 1, contour que l'on ramène sur le segment $[-1,1]$ par passage à la limite.

5. Soit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Calculer
$$(*)(a) \int_\gamma \frac{\sin z}{z\sinh z} dz, \quad (*)(b) \int_\gamma \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz, \quad (c) \int_\gamma e^{\frac{1}{z}}\ dz$$
$$(*)(d) \int_\gamma \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad (*)(e) \int_\gamma \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} dz$$

6. Soit γ un chemin injectif régulier "orienté" aire à gauche qui paramétrise la courbe $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z-1-i| = 1\}$. Calculer

$$a) \int_\gamma \frac{Lnz}{z+2}\; dz, \quad b) \int_\gamma \frac{Lnz}{z-1-i\frac{\sqrt{3}}{3}}\; dz.$$

7. - (*) Soit γ un chemin régulier par morceaux, injectif , "orienté" aire à gauche et qui paramétrise le bord du carré de sommets $0, 3, 3+3i, 3i$. Calculer

$$a) \int_\gamma \frac{1}{z+1+i}\; dz \quad b) \int_\gamma \frac{1}{z-1-i}\; dz.$$

- Soit $\gamma(t) = e^{it},\; t \in [0, 4\pi]$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4(z+1+2i)} dz$$

8. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

$$(*)(a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\sin x} dx, \quad (*)(b) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2-2x+5)^2} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx,$$

$$(*)(d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx, \quad (*)(e) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

9. (Transformation de Joukowski) On donne la fonction f par

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

   (a) En quel type de courbe cette fonction transforme-t-elle les cercles centrés à l'origine de rayon différent de 1 (resp. les segments de droites)?

   (b) Graphiquement montrer que cette fonction transforme les cercles pasant par le point de coordonnées $(1, 0)$ (resp. $(-1, 0)$) en "profil d'aile d'avion".

   (c) Montrer que f établit une bijection de $\{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| > 1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. En déterminer l'inverse et montrer qu'il s'agit encore d'une fonction holomorphe.

Analyse II

Liste "type" 8

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf à partir du site web

http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

et des pages relevant du cours

Analyse II, Math0007-4, 2 bac Inges

rubrique "solutions à la liste 8 de 2006-2007"