

ANALYSE II

Liste "type" 9

(Mardi 14), vendredi 17 et mardi 21 décembre 2010

REMARQUES pour les séances de répétition

- A la répétition: exercices *

INTRODUCTION A L'ANALYSE DE FOURIER

1. (*) Soit $a > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction f donnée ci-dessous de deux manières différentes (par "méthode de variables complexes" et en utilisant le théorème de Fourier).

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

2. Déterminer la transformée de Fourier des fonctions f suivantes ($a > 0$)

$$(i)f(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x), \quad (ii)(*)f(x) = e^{-|x-1|}$$

$$(iii)(*)f(x) = e^{2ix} e^{-|3x-1|}, \quad (iv)(*)f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ -e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (v)f(x) = x^2 e^{-3|x|}.$$

(*) Ces transformées sont-elles bornées dans \mathbb{R} , intégrables (dans \mathbb{R}), de carré intégrable (dans \mathbb{R})?

3. Montrer que, pour tout naturel strictement positif m , on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Suggestion : utiliser les propriétés des transformées de Fourier

4. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R} telle que $x \mapsto xf(x)$ soit de carré intégrable, on pose

$$\Delta_f = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx.$$

- (i) Pour $f(x) = e^{-x^2/4}$, montrer que

$$\Delta_f = \sqrt{2\pi}.$$

- (ii) En déduire l'égalité suivante (principe d'incertitude d'Heisenberg dans le cas d'une Gaussienne)

$$\Delta_f \Delta_{\hat{f}} = \pi^2$$

pour $f(x) = e^{-x^2/4}$ et en utilisant la notation \hat{f} pour la transformée de Fourier négative de f .

5. (*) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact¹. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, que sa transformée de Fourier \hat{f} se prolonge en une fonction holomorphe dans \mathbb{C} et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\hat{f}(z)| \leq C e^{A|\Im z|}, \quad z \in \mathbb{C}$$

lorsque le support de f est inclus dans $[-A, A]$ ($A > 0$).

¹Le support d'une fonction supposée définie dans \mathbb{R} est l'adhérence dans \mathbb{R} de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas. Son complémentaire est le plus grand ouvert d'annulation de f . Bien remarquer qu'une fonction peut être nulle en des points de son support.

6. (i) Soit une fonction $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ à support compact, non identiquement nulle². Montrer que sa transformée de Fourier \widehat{f} appartient aussi à $C_\infty(\mathbb{R})$ mais qu'elle n'est pas à support compact.

Suggestion : utiliser le fait que \widehat{f} se prolonge en une fonction holomorphe dans \mathbb{C}

(ii) Soit $a > 0$ et soit $g_a(x) = e^{-ax^2}$. Connaissant l'intégrale de Poisson et en utilisant des "méthodes de variables complexes", montrer que $\mathcal{F}_y^\pm g_a = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-y^2/(4a)}$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit une fonction intégrable f dont le support est inclus dans $[0, +\infty[$. Montrer que la transformée de Fourier \mathcal{F}^+ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$.

7. (*) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $L^2([-1, 1])$.

Comparer les espaces $L^2([-1, 1])$ et $L^1([-1, 1])$ (vis-à-vis de l'inclusion).

Démontrer alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^1([-1,1])} \leq C \|f\|_{L^2([-1,1])}, \quad \forall f \in L^2([-1, 1])$$

8. (*) On définit la fonction Γ (intégrale eulérienne) par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in]0, +\infty[.$$

(i) Montrer que cette définition a un sens (ie que $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ quel que soit $x > 0$)

(ii) Montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x) \Gamma(y)}.$$

(iii) Montrer que Γ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ et que l'on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout complexe z de partie réelle strictement positive.

9. On donne f , fonction continue sur \mathbb{R} , telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ soit borné sur \mathbb{R} . Démontrer que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{2\pi m}^- f e^{2i\pi m x}$$

en précisant dans quels espaces les convergences ont lieu. En déduire que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}, \quad x \notin \mathbb{Z}.$$

10. (*) On donne la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de cette fonction dans $L^2([-\pi, \pi])$ en simplifiant la réponse au maximum; la réponse finale ne doit comporter que des fonctions sinus et cosinus.

(ii) En déduire que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

11. On se place dans $L^2([0, \pi])$.

(i) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $f(x) = \sin^2 x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.

²Valable aussi pour f de carré intégrable et à support compact

- (ii) Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier de $g(x) = \sin x$. Exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.
(iii) En déduire l'égalité suivante

$$\frac{\pi}{2} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2 - 1}.$$

12. Déterminer le développement en série trigonométrique de Fourier dans $L^2[-\pi, \pi]$ de la fonction $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$; exprimer le résultat en utilisant uniquement des fonctions sin et cos.
Déduire des calculs précédents que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

13. Dans l'espace $L^2([-1, 1])$ on a le développement suivant

$$x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \cos(\pi m x).$$

En prenant le produit scalaire de chacun des deux membres de l'égalité avec la fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$, déterminer la valeur de a_1 .