1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'examen de math du 27 janvier 2012

Version 1er février 2012

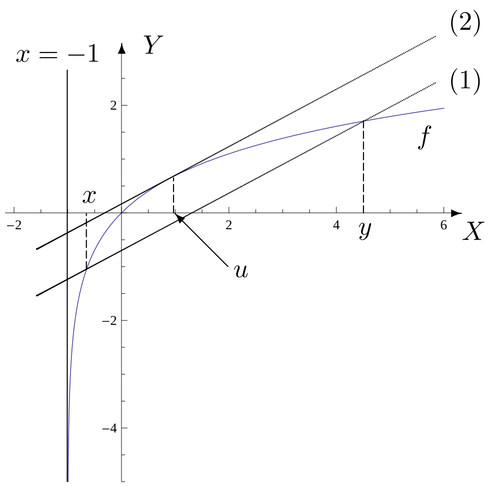
Mathématiques générales A
Examen du vendredi 27/01/12, 08h30-11h45, Amphis divers

Théorie

Question 1.

- **Enoncer le ≪ théorème des accroissements finis ≫ dans le cas de la fonction** $x \mapsto \ln(x+1)$ **et en donner une interprétation graphique.**

  Solution. Voir cours.



Interprétation graphique :
$\forall x, y \in]-1, +\infty[$ il existe un réel u compris entre x et y tel que la tangente au graphique de la fonction f au point d'abscisse u soit parallèle à la droite passant par les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

(1) : droite de coefficient angulaire $k = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ et passant par les points du graphique de f d'abscisses x et y

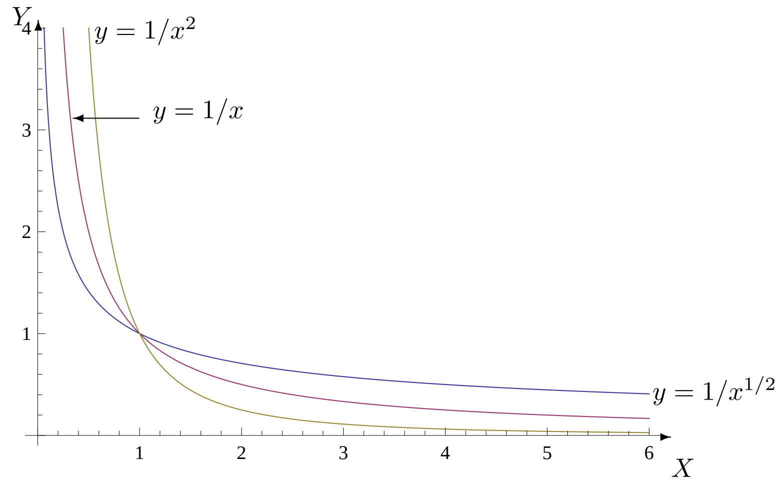
(2) : droite de coefficient angulaire $Df(u)$ avec $Df(u) = k$ et passant par le point du graphique de f d'abscisse u (c'est-à-dire la tangente au graphique de f au point d'abscisse u)

- **Définir la notion de produit scalaire de deux vecteurs. En donner l'expression analytique (c'est-à-dire en utilisant les composantes des vecteurs), en spécifiant bien dans quel cadre vous vous placez.**
  Solution. Voir cours.

Question 2.

- **Quelle est la définition de l'intégrabilité d'une fonction continue sur** $]0, 1]$ **et à valeurs positives sur cet intervalle ?**
- **Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel** s **pour que la fonction** $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ **soit intégrable sur** $]0, 1]$ **? Démontrer ce résultat en vous servant de la définition de l'intégrabilité que vous donnez au point précédent.**
  Solution. Voir cours

- **Dans un même repère orthonormé du plan, représenter la fonction** $\frac{1}{x^s}$, $x > 0$ **pour** $s = 1/2, 1, 2$ **et interpréter l'intégrabilité sur** $]0, 1]$**.**



On peut interpréter l'intégrabilité de la façon suivante : pour $s = 1$ et $s = 2$, l'aire sous la courbe est infinie alors que pour $s = 1/2$, l'aire sous la courbe est finie.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante**

$$\sin(3x) = \cos x.$$

Solution. L'équation est équivalente à $\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et on a

$$\left(3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{8}$, $\frac{17\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{21\pi}{8}$.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$\sin\left(\ln\left(e^{-\pi/3}\right)\right) + \cos\left(\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \qquad e^{i\pi/2}$$

Solution. Les fonctions sin, exp, cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{im}(\exp) =]0, +\infty[$; la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction tg est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\mathrm{im}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}$; la première expression est donc définie. Les fonctions logarithme et exponentielle étant inverses l'une de l'autre, on a

$$\sin\left(\ln\left(e^{-\pi/3}\right)\right) + \cos\left(\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin(-\pi/3) + \cos(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 1.$$

Comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$, l'expression $e^{i\pi/2}$ est définie et on a $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$.

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe $\frac{i}{1-i}$

Solution. Le complexe donné est égal à $\frac{-1+i}{2}$. Sa partie réelle est donc $\frac{-1}{2}$ et sa partie imaginaire $\frac{1}{2}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-4x|}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto x \ln x$ est définie sur $A =]0, +\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$, le calcul de la limite en 0^+ peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $0 \,.\, \infty$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $\dfrac{\ln x}{x^{-1}}$. En effet, si $V =]0, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit), on a
1) $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto x^{-1}$ sont dérivables dans V
2) $Dg(x) = -x^{-2} \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \infty$
4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$
Dès lors, la limite cherchée vaut 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|1-4x|}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-4x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1-4x} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{\frac{1}{x}-4} = \frac{1}{4}.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/6} \cos x \sin(3x)\ dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \cos x \sin(3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{6}]$. Cela étant, comme $\cos x \sin(3x) = \frac{1}{2}(\sin(4x) + \sin(2x))$, on a

$$\int_0^{\pi/6} \cos x \sin(3x)\ dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(4x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{8}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg}(2x)\Big]_0^t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t).$$

Dès lors,

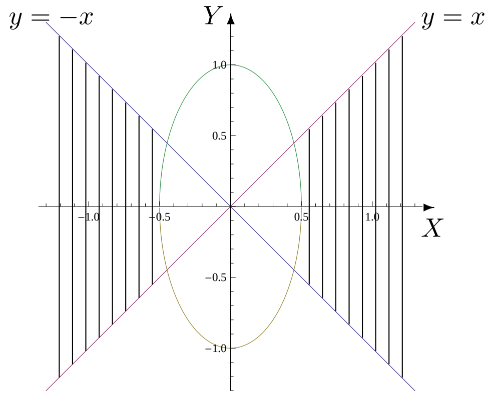
$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+4x^2}\ dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$ est à valeurs positives et que la limite précédente est finie, la fonction est intégrable et la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut $\frac{\pi}{4}$.

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y)\ :\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 \geq y^2 \geq 1 - 4x^2\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ **vérifie l'équation différentielle**

$$xD^2f + 2(Df)^2 + 2Df = 0.$$

Solution. La fonction donnée est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et on a

$$D\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-x^{-2}}{1+x^{-2}} = \frac{-1}{x^2+1} \quad \text{et} \quad D^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{pour tout} \quad x \neq 0.$$

Dès lors,

$$xD^2f + 2(Df)^2 + 2Df = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} = 0$$

et la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle

$$D^2f + 4Df + 5f = 1$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f + 4Df + 5f = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 4z + 5$ dont les zéros sont $-2-i$ et $-2+i$. Il s'ensuit que les solutions réelles de l'équation homogène sont les fonctions

$$e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = A,\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme $Df_P(x) = D^2f_P(x) = 0$, on a $5A = 1 \Leftrightarrow A = 1/5$.
Ainsi, $f_P(x) = 1/5,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de l'équation donnée sont les fonctions

$$e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{5},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un chimiste a 10 centilitres d'une solution qui contient une concentration d'acide à 20 %***. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à*** 40 % ***?***
Solution. La solution donnée contient $10 \,.\, 0,2 = 2$ cl $= 20$ ml d'acide pur. Si on note x le nombre de ml d'acide pur à ajouter, comme 10 cl = 100 ml, on a l'équation

$$20 + x = 0,4(100+x) \Leftrightarrow 20 + x = 40 + 0,4x \Leftrightarrow 0,6x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}.$$

On doit donc ajouter $\frac{100}{3} \approx 33,33$ ml d'acide pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 40 %.

$\boxed{\textbf{\textit{Exercices BIS}}}$

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$x\ |2-x|\ \leq\ x^2$$

Solution. Tout réel négatif x est solution puisque le premier membre de l'inéquation est négatif tandis que le second est positif.
Considérons $x > 0$. L'inéquation est alors équivalente à $|2-x| \leq x$.
Si $x \in]0,2]$, $|2-x| = 2-x$ et l'inéquation s'écrit $2-x \leq x \Leftrightarrow x \geq 1$.
Si $x \in [2,+\infty[$, $|2-x| = x-2$ et l'inéquation s'écrit $x-2 \leq x$, inégalité vraie pour tout réel.
Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 0] \cup [1,+\infty[$.

2. **Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]3\pi, \frac{7\pi}{2}\right[$ et si $\operatorname{tg}\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que valent les nombres**

$$\operatorname{cotg}\ x,\ \sin x,\ \cos x?$$

Solution. Pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\operatorname{cotg}(x) = 1/\operatorname{tg}(x)$. Dès lors, $\operatorname{cotg}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Comme $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, on obtient d'abord $\cos^2(x) = \frac{2}{3}$. Ensuite, comme $\cos(x) < 0$ puisque $x \in \left]3\pi, \frac{7\pi}{2}\right[$, on obtient $\cos(x) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.
Enfin, comme $\sin(x) = \operatorname{tg}(x)\cos(x)$, on a $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.