1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'examen de math A du 16 août 2012

Version 17 août 2012

Question 1.

- **Quelle est la définition de la fonction** arctg **?**
- **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** arctg **? Démontrer ce résultat.**
- **Où la fonction** $x \mapsto \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}(x))$ **est-elle définie ? (Donner le domaine de définition le plus grand possible)**

Solution. Pour les 2 premiers items : voir cours.
- La fonction$x \mapsto \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}(x))$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Question 2. **Les questions suivantes concernent la théorie des fonctions d'une variable réelle.**

- **Quelle est la définition de la continuité d'une fonction en un point de son domaine de définition ?**
- **Quelle est la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point d'un intervalle ouvert où elle est définie ? En donner une interprétation graphique.**
- **Quel(s) est (sont) le(s) lien(s) entre la notion de continuité et de dérivabilité en un point ? Enoncer et démontrer.**

Solution. Voir cours.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle** x **appartient à l'intervalle** $[3\pi, 4\pi]$**, résoudre l'équation suivante**

$$\sin(x)\ \cos(2x) \ = \ \frac{1}{2} \ + \ \cos(x)\ \sin(2x).$$

Solution. L'équation est équivalente à

$$\sin(x)\ \cos(2x) \ - \ \cos(x)\ \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x-2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[3\pi, 4\pi]$ sont $\dfrac{19\pi}{6}, \ \dfrac{23\pi}{6}$.

(b) Si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\ln(e^{\pi}) \ + \ \mathrm{arctg}\big(\mathrm{tg}(3)\big)$$

Solution. Comme $\mathrm{dom}(\exp) = \mathbb{R}$, $\mathrm{im}(\exp) =]0, +\infty[$ et $\mathrm{dom}(\ln) =]0, +\infty[$, le premier terme de la somme est défini et on a

$$\ln(e^{\pi}) = \pi \ln(e) = \pi.$$

De plus, $3 \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; le second terme est donc défini et on a, vu la périodicité de la fonction tg, $\mathrm{arctg}\big(\mathrm{tg}(3)\big) = \mathrm{arctg}\big(\mathrm{tg}(3-\pi)\big) = 3 - \pi$. Dès lors, l'expression donnée vaut $\pi + 3 - \pi = 3$.

(c) Déterminer la partie imaginaire du complexe $\frac{1}{1+i}$

Solution. Le complexe donné est égal à $\dfrac{1-i}{2}$. Sa partie imaginaire vaut donc $-\dfrac{1}{2}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(2x)}{x - \pi}$$

Solution. La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $\mathbb{R}_0 \cap]-\infty, 0[=]-\infty, 0[$, le calcul de la limite en 0^- peut donc être envisagé. Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0^+,$$

la limite demandée vaut 0^+.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant π rencontre A, le calcul de la limite en π peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, appliquons le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon[\setminus \{\pi\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, considérons $f_1 : x \mapsto \sin(2x)$ et $f_2 : x \mapsto x - \pi$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
2) La dérivée de f_2 est non nulle dans V
3) On a $\lim_{x\to\pi} \sin(2x) = \lim_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$
4) De plus, $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2.$
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 2.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx, \quad \int_0^{\pi/4} \cos(x)\ \sin(x)\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto\mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné. De plus, elle est positive sur cet ensemble. Pour tout $t > 1$, cette fonction est donc intégrable sur $[1, t]$ et on a

$$\int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\ dx = \int_1^t \frac{1}{x}\ dx - \int_1^t \frac{1}{x+1}\ dx = \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^t = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| - \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \ln 2 = \ln 2.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ est à valeurs positives sur $[1, +\infty[$, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[1, +\infty[$.

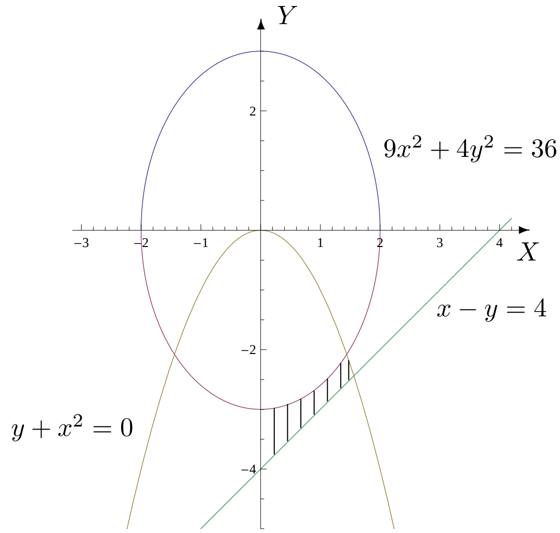
La fonction $x \mapsto \cos(x)\ \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \pi/4]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x)\ \sin(x)\ dx = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0,\ x \geq 0,\quad x - y \leq 4,\ 9x^2 + 4y^2 \geq 36 \text{ et } y + x^2 \leq 0\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Si la fonction** $x \mapsto \ln(x^2)$ **vérifie l'équation différentielle**

$$x^2\, D^2 f(x) + x\, Df(x) = g(x), \quad x \neq 0$$

que vaut $g(x)$ **?**

Solution. D'une part, la fonction donnée est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et on a

$$D \ln(x^2) = \frac{2}{x} \quad \text{et} \quad D^2 \ln(x^2) = -\frac{2}{x^2}.$$

Dès lors,

$$x^2\, D^2 f(x) + x\, Df(x) = -2 + 2 = 0$$

et $g(x)$ vaut 0.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (f **est la fonction inconnue)**

$$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = x + 1$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ et son zéro double est -1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2)e^{-x}, \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax + B, \ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Comme

$$Df_P(x) = A \quad \text{et} \quad D^2 f_P(x) = 0,$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$2A + Ax + B = x + 1$$

et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1$ et $B = -1$.
Ainsi, $f_P(x) = x - 1, \ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2)e^{-x} + x - 1, \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Pour éviter la prolifération des microbes, l'eau d'une citerne doit contenir 4% ***de son volume en chlore. Une mesure vient d'être faite et on constate que pour les 4 m***^{3} ***d'eau contenus dans la citerne la concentration en chlore n'est que de*** 2%***. Combien de litres de chlore doit-on ajouter pour éviter la prolifération microbienne ?***
Solution. Comme 4 m^3 = 4000 l, la citerne contient $4000\ .\ 0,02 = 80$ l de chlore pur. Si on note x le nombre de l de chlore pur à ajouter, on a l'équation
$$80 + x = 0,04(4000 + x) \Leftrightarrow 80 + x = 160 + 0,04x \Leftrightarrow 0,96x = 80 \Leftrightarrow x = \frac{250}{3}.$$
On doit donc ajouter $\frac{250}{3} = 83,333\ldots$ litres de chlore pur à l'eau de la citerne pour qu'elle contienne 4 % de son volume en chlore.