1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'examen de math A du 24 mai 2012

Version 30 mai 2012

Question 1.

- **Comment définit-on la fonction logarithme népérien** (ln) **à partir de la fonction exponentielle ?**
- **Représenter la fonction** ln
- **Définir et interpréter géométriquement la notion de concavité de cette fonction logarithme.**
- **Enoncer et démontrer la propriété de la fonction logarithme faisant intervenir une somme et un produit.**

Solution. Pour les 2 premiers items : voir cours.
- La fonction ln est concave sur $I =]0, +\infty[$ si

$$x_0, x_1 \in I \text{ et } r \in [0,1] \Rightarrow \ln(x_0 + r(x_1 - x_0)) \geq \ln(x_0) + r(\ln(x_1) - \ln(x_0)).$$

Géométriquement, cela signifie que quels que soient les points x_0 et x_1 de I et quel que soit le point x compris entre x_0 et x_1, l'ordonnée du point P du graphique de ln d'abscisse x est supérieure ou égale à l'ordonnée du point Q de même abscisse situé sur la droite passant par les points de coordonnées $(x_0, \ln(x_0))$ et $(x_1, \ln(x_1))$.

- $\forall x, y > 0 : \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$.
Preuve : $\forall x, y > 0$, on a $x = \exp(\ln(x))$ et $y = \exp(\ln(y))$ puisque ces fonctions sont inverses l'une de l'autre. Dès lors, comme $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x).\exp(y) = \exp(x+y)$, on a

$$x.y = \exp(\ln(x)).\exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$$

et en prenant l'image de ces 2 réels strictement positifs par un ln, on a $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Question 2.

- **Soit l'équation différentielle** $D^2 f(x) + aDf(x) + bf(x) = 0$ **où** a **et** b **sont des nombres réels donnés,** f **la fonction inconnue et** x **la variable. Si le discriminant de l'équation caractéristique associée à cette équation vaut** -4**, donner l'ensemble des solutions de cette équation.**
- **Donner une autre expression de ces solutions en expliquant votre démarche.**

Solution. Les solutions de l'équation caractéristique associée $z^2 + az + b = 0$ sont $-\frac{a}{2} - i$ et $-\frac{a}{2} + i$.
Dès lors, les solutions de l'équation différentielle homogène donnée sont les fonctions

$$f(x) = c_1\, e^{(-\frac{a}{2} - i)x} + c_2\, e^{(-\frac{a}{2} + i)x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Ces solutions peuvent s'écrire sous la forme

$$f(x) = e^{\frac{-ax}{2}}\,(c_1' \cos(x) + c_2' \sin(x)),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1' et c_2' sont des constantes complexes arbitraires.

En effet, comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$ et $e^{x+y} = e^x.e^y,\ x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{(-\frac{a}{2} - i)x} = e^{\frac{-ax}{2}}(\cos(-x) + i\sin(-x)) = e^{\frac{-ax}{2}}(\cos(x) - i\sin(x))$$

et

$$e^{(-\frac{a}{2} + i)x} = e^{\frac{-ax}{2}}(\cos(x) + i\sin(x))$$

puisque la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

En mettant la fonction exponentielle en évidence et en regroupant les fonctions sinus et cosinus entre elles , il vient

$$f(x) = e^{\frac{-ax}{2}}((c_1 + c_2)\cos(x) + i(-c_1 + c_2)\sin(x)) = e^{\frac{-ax}{2}}(c_1' \cos(x) + c_2' \sin(x)),\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1' et c_2' sont des constantes complexes arbitraires.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation suivante**
$$\cos(4x) = 1 + \sin(2x).$$

Solution. L'équation est équivalente à
$$1 - 2\sin^2(2x) = 1 + \sin(2x) \Leftrightarrow \sin(2x)(1 + 2\sin(2x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \ \text{ ou } \ \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$
Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{19\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12}$ et 2π.

(b) Si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\ln(3e) + \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) - \sqrt[4]{(-\ln 3)^4}$$

Solution. Comme $\sqrt[4]{(-\ln 3)^4} = \ln 3$, en appliquant la propriété relative au logarithme d'un produit de 2 réels positifs et en utilisant $\ln e = 1$, on a
$$\ln(3e) + \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) - \sqrt[4]{(-\ln 3)^4} = 1 + \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$
De plus, on sait que $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\operatorname{arcos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Dès lors, l'expression donnée vaut $1 + \frac{3\pi}{4}$.

(c) Déterminer la partie imaginaire du complexe $(1+i)^2$
Solution. Le complexe donné est égal à $2i$. Sa partie imaginaire vaut donc 2.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x-\pi}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right).$$

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x-\pi}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\pi, \ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant π rencontre A, le calcul de la limite en π peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$, appliquons le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon[\setminus \{\pi\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit, considérons $f_1 : x \mapsto \operatorname{tg}(2x)$ et $f_2 : x \mapsto x - \pi$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
2) La dérivée de f_2 est non nulle dans V
3) On a $\lim_{x\to\pi} \operatorname{tg}(2x) = \lim_{x\to\pi}(x - \pi) = 0$
4) De plus, $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim\limits_{x\to\pi} \frac{2}{\cos^2(2x)} = 2.$
Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 2.

La fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1 \ \text{ et } \ \lim_{y\to-1} \exp(y) = \frac{1}{e},$$

la limite demandée vaut $\frac{1}{e}$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-4} dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^2(x)\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto\mapsto \frac{1}{x^2-4}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ donc sur $[3, +\infty[$, ensemble non borné. De plus, elle est positive sur cet ensemble. Pour tout $t > 3$, cette fonction est donc intégrable sur $[3, t]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_3^t \frac{1}{x^2-4}\ dx &= \frac{1}{4}\left(\int_3^t \frac{1}{x-2}\ dx - \int_3^t \frac{1}{x+2}\ dx\right)\\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(x-2) - \ln(x+2)\Big]_3^t = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)\right).\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{1}{x^2-4}\ dx = \frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right) + \frac{1}{4}\ln 5 = \frac{1}{4}\ln 5.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ est à valeurs positives sur $[3, +\infty[$, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[3, +\infty[$.

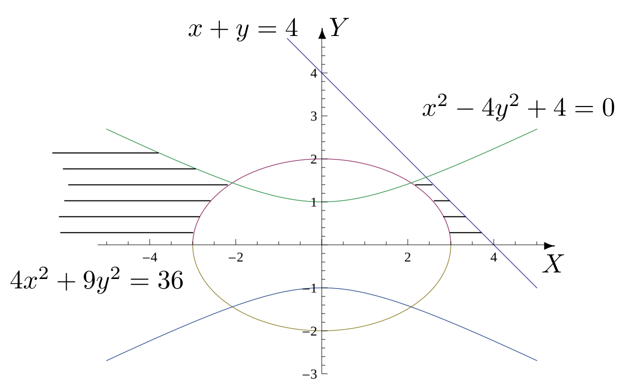
La fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \pi]$ donc intégrable sur cet ensemble. Comme $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, on a

$$\int_0^{\pi} \cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, \quad x + y \leq 4,\ 4x^2 + 9y^2 \geq 36 \text{ et } x^2 - 4y^2 + 4 \geq 0\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Si la fonction** $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ **vérifie l'équation différentielle**

$$x^2\, f(x)\, D^2 f(x) + (Df(x))^2 = g(x), \quad x \in]-1, 1[,$$

que vaut $g(x)$ **?**

Solution. D'une part, la fonction donnée est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$D\sqrt{1-x^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$D^2\sqrt{1-x^2} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{pour tout} \quad x \in]-1,1[.$$

Dès lors,

$$x^2\, f(x)\, D^2 f(x) + (Df(x))^2 = \frac{-x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} = 0$$

et $g(x)$ vaut 0.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (f est la fonction inconnue)

$$D^2 f(x) + 4Df(x) - 5f(x) = 12x\, e^x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + 4Df(x) - 5f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 4z - 5 = (z-1)(z+5)$ et ses zéros sont -5 et 1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{-5x} + c_2 e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = (Ax+B)x\, e^x = (Ax^2 + Bx)e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Comme

$$Df_P(x) = (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x \text{ et } D^2 f_P(x) = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x,$$

en remplaçant dans l'équation, on a

$$Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B + 4Ax^2 + (8A+4B)x + 4B - 5Ax^2 - 5Bx = 12x$$

et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1$ et $B = -1/3$.
Ainsi, $f_P(x) = \left(x^2 - \dfrac{x}{3}\right) e^x,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-5x} + \left(c_2 + x^2 - \frac{x}{3}\right) e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Pour éviter la prolifération des microbes, l'eau d'une citerne doit contenir 4% de son volume en chlore. Une mesure vient d'être faite et on constate que pour les 4 m³ d'eau contenus dans la citerne la concentration en chlore n'est que de 2%. Combien de litres de chlore doit-on ajouter pour éviter la prolifération microbienne ?
Solution. Comme 4 m^3 = 4000 l, la citerne contient $4000 \,.\, 0,02 = 80$ l de chlore pur. Si on note x le nombre de l de chlore pur à ajouter, on a l'équation

$$80 + x = 0,04(4000 + x) \Leftrightarrow 80 + x = 160 + 0,04x \Leftrightarrow 0,96x = 80 \Leftrightarrow x = \frac{250}{3}.$$

On doit donc ajouter $\dfrac{250}{3} = 83,333\ldots$ litres de chlore pur à l'eau de la citerne pour qu'elle contienne 4 % de son volume en chlore.