Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'examen de math B du 16 août 2012

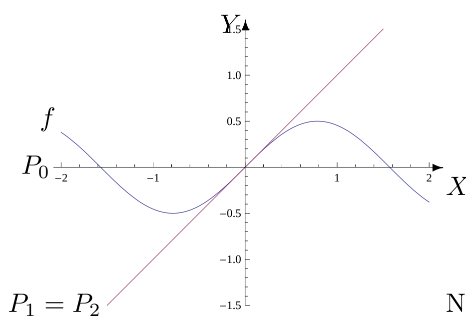
Version 20 août 2012

$\boxed{\textbf{\textit{Exercices}}}$

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = \cos x \;\ \sin x.$$

   a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
   b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations à l'ordre 0, 1 et 2 en utilisant différentes couleurs.

   Solution. La fonction $f : x \mapsto \cos x \;\ \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$Df(x) = \cos(2x) \quad D^2f(x) = -2\sin(2x) \;\text{ et }\; D^3f(x) = -4\cos(2x).$$
   Comme $f(0) = 0,\; Df(0) = 1,\; D^2f(0) = 0$ et $D^3f(0) = -4$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = x = P_2(x) \qquad P_3(x) = P_2(x) + \frac{D^3f(0)}{3!}x^3 = x - \frac{2x^3}{3},\; x \in \mathbb{R}.$$



NB : $P_0(x) = f(0) = 0$

2. **a) Soit la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$
   - Cette matrice est-elle inversible ? Pourquoi ?
   - Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.
   - Déterminer les valeurs propres de A.

   Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det A = \cos^2(1) + \sin^2(1) = 1 \neq 0$. La matrice A est donc inversible.

   La matrice des cofacteurs de A étant égale à
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix},$$
   l'inverse de A est la matrice
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$
   et on a
$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(1) + \sin^2(1) & \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cos(1) \\ \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cos(1) & \sin^2(1) + \cos^2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} \cos(1)-\lambda & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1)-\lambda \end{pmatrix} = (\cos(1)-\lambda)^2+\sin^2(1) = \lambda^2 - 2\cos(1)\,\lambda + 1 = 0$$

Comme $\Delta = 4\cos^2(1) - 4 = -4\sin^2(1) = (2i\sin(1))^2$, les valeurs propres de A sont $\cos(1)+i\sin(1)$ et $\cos(1)-i\sin(1)$.

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
- Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0.$$

Ainsi, la valeur propre de A est 1 (valeur propre triple).

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c est une constante complexe non nulle.

La matrice A n'est donc pas diagonalisable puisqu'elle ne possède pas 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

3. **a) On donne la fonction f par**

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.
- En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable et la dérivée par rapport à sa seconde variable ?
- En utilisant l'expression des dérivées obtenues précédemment, montrer que

$$D_x f(x,y) + iD_y f(x,y) = 0$$

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f est égal à

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>0,\ \sqrt{x^2+y^2}>0,\ x\neq 0\right\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\} = \mathbb{R}_0\times\mathbb{R}.$$

La représentation graphique de cet ensemble est constituée de tous les points du plan sauf ceux de l'axe des ordonnées.

- En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_t \ln(t)\big|_{t=\sqrt{x^2+y^2}} \ . \ D_v \sqrt{v}|_{v=x^2+y^2} \ . \ D_x(x^2+y^2) + iD_t \text{arctg}(t)|_{t=y/x} \ . \ D_x\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ . \ 2x + i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \ . \ \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

et

$$D_y f(x,y) = D_t \ln(t)\big|_{t=\sqrt{x^2+y^2}} \ . \ D_v \sqrt{v}|_{v=x^2+y^2} \ . \ D_y(x^2+y^2) + iD_t \text{arctg}(t)|_{t=y/x} \ . \ D_y\left(\frac{y}{x}\right)$$

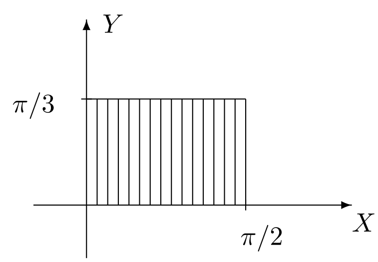
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ . \ 2y + i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \ . \ \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y+ix}{x^2+y^2}$$

- Dès lors, on a

$$D_x f(x,y) + iD_y f(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{iy+i^2x}{x^2+y^2} = 0.$$

b) Déterminer, si elle existe, l'intégrale $\iint_A \cos(x-2y)\ dx\ dy$ **sur** $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$ **et représenter l'ensemble d'intégration**

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x,y) \mapsto \cos(x-2y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$I = \int_0^{\pi/3} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x-2y)\ dx \right) dy = \int_0^{\pi/3} \Big[\sin(x-2y) \Big]_{x=0}^{x=\pi/2} dy$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) - \sin(-2y) \right) dy = \int_0^{\pi/3} (\cos(2y) + \sin(2y))\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sin(2y) - \cos(2y) \Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin(0) + \cos(0) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\sqrt{3}+3}{4}.$$

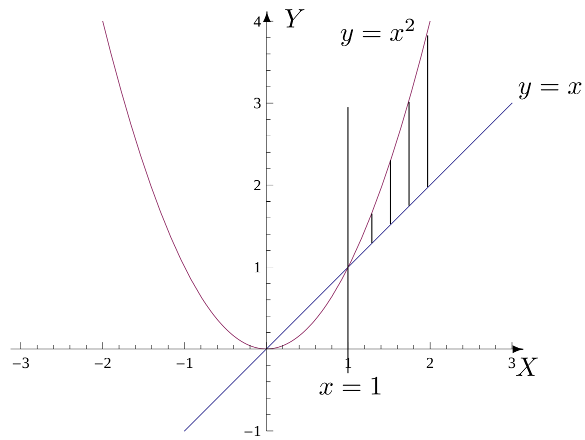
Puisque la fonction est intégrable sur A parallèle aux 2 axes, on aurait pu calculer l'intégrale en permutant l'ordre d'intégration et on aurait obtenu le même résultat.

c) Calculer, si possible, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\, dy \right) dx$$

et représenter son ensemble d'intégration.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^4}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A$.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{x}{y^4}$ est continue sur le fermé borné $[x, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\ dy = x\ .\ \left[\frac{-1}{3y^3}\right]_x^{x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}\right).$$

Etudions l'intégrabilité de $h : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^5}\right)$ en $+\infty$. Comme h est continu sur $[1, t]\ \forall t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}\right)\ dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^4}\right]_1^t = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t} + \frac{3}{4}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1, +\infty[$.

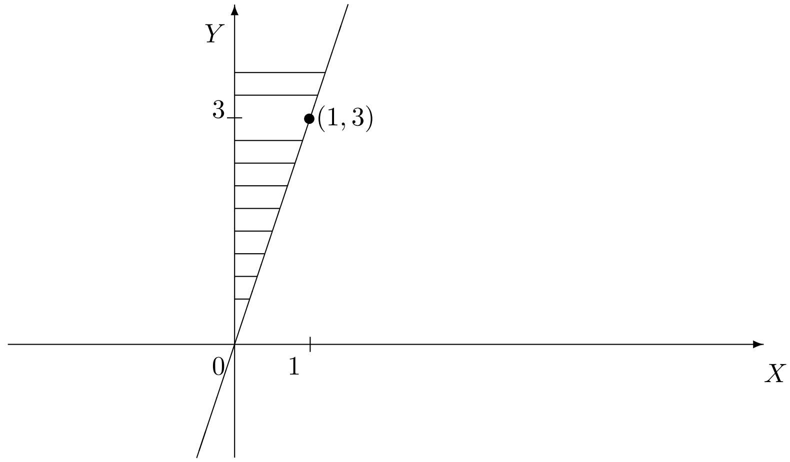
Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\, dy\right)\ dx = \frac{1}{4}.$$

4. **a) On donne l'ensemble fermé non borné A (hachuré). Si possible, déterminer**

$$\int\int_A e^{-y}\ dx\ dy$$

en choisissant un ordre d'intégration. Permuter alors les intégrales et déterminer (en effectuant le calcul) si le résultat change ou non.



Solution. L'ensemble d'intégration est

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [3x,+\infty[\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in \left[0, \frac{y}{3}\right]\right\}$$

et la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-y}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble non borné fermé.

Etudions l'intégrabilité de f sur A. Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^{-y}$ est continue sur le fermé borné $\left[0, \frac{y}{3}\right]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{y/3} e^{-y}\ dx = e^{-y}[x]_0^{y/3} = \frac{y}{3}e^{-y}.$$

Etudions l'intégrabilité de $h : y \mapsto \frac{y}{3}e^{-y}$ en $+\infty$. Comme h est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a, par une intégration par parties

$$\int_0^t \frac{y}{3}e^{-y}\ dy = \left[-\frac{y}{3}e^{-y}\right]_0^t + \frac{1}{3}\int_0^t e^{-y}\ dy = -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}(e^{-t}-1).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{y/3} e^{-y}\,dx\right) dy = \frac{1}{3}.$$

La fonction étant intégrable, on peut permuter l'ordre d'intégration. Vérifions qu'on obtient bien le même résultat en calculant

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{3x}^{+\infty} e^{-y}\ dy\right)\ dx = \int_0^{+\infty}\ \left[-e^{-y}\right]_{3x}^{+\infty}\ dx = \int_0^{+\infty}\ e^{-3x}\ dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

b) Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-2)^m}{2^{3m+1}}, \qquad\qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(\cos(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}.$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-2)^m}{2^{3m+1}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^m$, série géométrique convergente puisque la raison $-\dfrac{1}{4} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^m = \frac{-1}{8}\ \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{10}.$$

La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\cos(\frac{\pi}{3}))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\frac{1}{2}) - 1 = \sqrt{e} - 1$.