1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'examen de math B du 24 mai 2012

Version 4 juin 2012

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \sin^2 x.$$

a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $1, 2, 3$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter le graphique de f et les approximations demandées en utilisant différentes couleurs.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

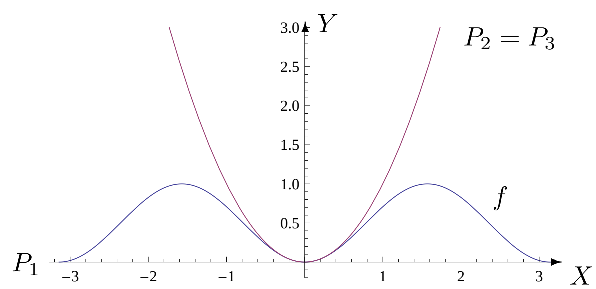
$$Df(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x) \quad D^2f(x) = 2\cos(2x) \text{ et } D^3f(x) = -4\sin(2x).$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, $D^2f(0) = 2$ et $D^3f(0) = 0$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 0, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = x^2$$

et

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{D^3f(0)}{6!}x^3 = x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) Soient un réel a et une matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \sin(a) & \cos(a) \\ \sin(2a) & \cos(2a) \end{pmatrix}.$$

- Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice est-elle inversible ? Justifier.
- Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si

$$\det A = \sin(a)\cos(2a) - \sin(2a)\cos(a) = \sin(a - 2a) = -\sin(a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, la matrice A est inversible pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

La matrice des cofacteurs de A étant égale à

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(2a) & -\sin(2a) \\ -\cos(a) & \sin(a) \end{pmatrix},$$

l'inverse de A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{-1}{\sin(a)} \begin{pmatrix} \cos(2a) & -\cos(a) \\ -\sin(2a) & \sin(a) \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

et on a

$$
\begin{aligned}
A.A^{-1} &= \frac{-1}{\sin(a)} \begin{pmatrix} \sin(a) & \cos(a) \\ \sin(2a) & \cos(2a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2a) & -\cos(a) \\ -\sin(2a) & \sin(a) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sin(a)} \begin{pmatrix} \sin(a)\cos(2a) - \sin(2a)\cos(a) & -\sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) \\ \sin(2a)\cos(2a) - \sin(2a)\cos(2a) & -\sin(2a)\cos(a) + \sin(a)\cos(2a) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sin(a)} \begin{pmatrix} -\sin(a) & 0 \\ 0 & -\sin(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
- Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont -1 (double) et 1 (simple).

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des constantes complexes non simultanément nulles.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ x = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

La matrice A est donc diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants. Une matrice S inversible possible est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et est telle que} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **a) On donne la fonction g par**

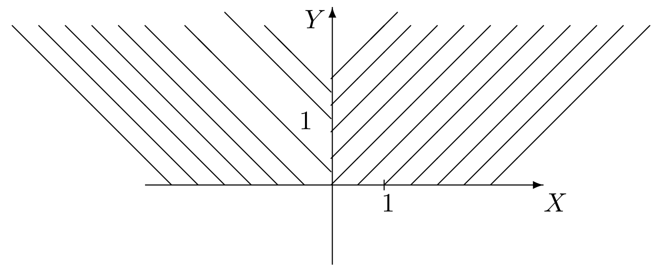
$$g(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction. Représenter ce domaine.

Solution. Le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction g est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\ \frac{x^2}{y} > 0\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ x \neq 0\} = \mathbb{R}_0 \times]0,+\infty[.$$

Voici la représentation graphique de cet ensemble (partie hachurée) : les points des axes sont exclus de l'ensemble.



- En un point du domaine de dérivabilité, que vaut la dérivée partielle de g par rapport à sa deuxième variable ? Simplifier votre réponse au maximum.

Solution. En un point de A, on a

$$D_y g(x,y) = D_Z \ln(Z)|_{Z=\frac{x^2}{y}} \ .\ D_y\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{y}{x^2}.\left(\frac{-x^2}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}.$$

On peut aussi écrire g sous la forme $g(x,y) = \ln(x^2) - \ln(y)$ puisque x^2 et y sont strictement positifs dans A. Dès lors, la dérivée est immédiate.

- Déterminer l'expression explicite de $F(t) = g\left(t-1, \frac{1}{t-1}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.

Solution. L'expression explicite de F est donnée par $F(t) = \ln((t-1)^3)$ et son domaine de dérivabilité est l'ensemble

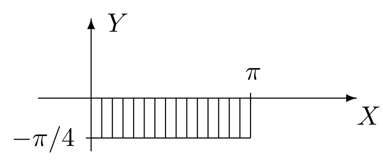
$$B = \{t \in \mathbb{R} : (t-1)^3 > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : t-1 > 0\} =]1,+\infty[.$$

En tout point de B, on a

$$DF(t) = \frac{3}{t-1}$$

b) Déterminer, si elle existe, l'intégrale $\iint_A \sin(x+2y)\ dx\ dy$ sur $A = [0,\pi] \times [-\frac{\pi}{4}, 0]$ et représenter l'ensemble d'intégration

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.



La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x+2y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin(x+2y)\ dy \right)\ dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \Big[\cos(x+2y) \Big]_{y=-\frac{\pi}{4}}^{y=0}\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\ dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(x) - \sin(x))\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\sin(x) + \cos(x) \Big]_0^\pi = -\frac{1}{2}(\sin(\pi) + \cos(\pi) - \sin(0) - \cos(0)) = 1.
\end{aligned}$$

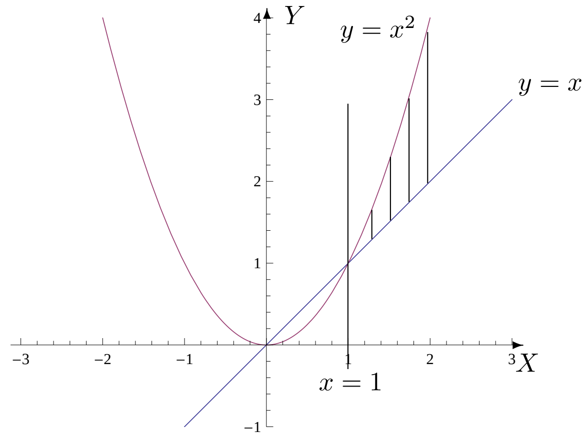
Puisque la fonction est intégrable sur A parallèle aux 2 axes, on aurait pu calculer l'intégrale en permutant l'ordre d'intégration et on aurait obtenu le même résultat.

c) Calculer, si possible, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\, dy \right)\, dx$$

et représenter son ensemble d'intégration.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{y^4}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique se trouve ci-dessous (partie hachurée) ; les points des “bords” sont compris dans l'ensemble.



Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y)\ \forall (x,y) \in A$.
Pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \frac{x}{y^4}$ est continue sur le fermé borné $[x, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\ dy = x\ .\ \left[\frac{-1}{3y^3}\right]_x^{x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}\right).$$

Etudions l'intégrabilité de $h : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^5}\right)$ en $+\infty$. Comme h est continu sur $[1,t]\ \forall t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}\right)\ dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^4}\right]_1^t = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t} + \frac{3}{4}\right).$$

Dès lors,

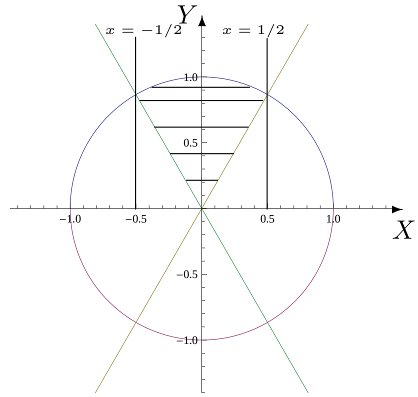
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$\int_1^{+\infty}\left(\int_x^{x^2}\frac{x}{y^4}\,dy\right)\,dx=\frac{1}{4}.$$

4. **a) On donne l'ensemble fermé borné hachuré A suivant. Déterminer** $\displaystyle\iint_A y\,e^x\,dx\,dy$.



Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto ye^x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble borné fermé. Dès lors, la fonction est intégrable sur A.
Utilisons les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale demandée. Le point d'intersection du cercle trigonométrique avec la droite d'équation cartésienne $x=\frac{1}{2}$ a pour abscisse $\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ où $\theta=\frac{\pi}{3}$ puisque θ varie dans $[0,2\pi[$. De même, le point d'intersection du cercle avec la droite d'équation cartésienne $x=-\frac{1}{2}$ a pour abscisse $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ où $\theta=\frac{2\pi}{3}$ puisque θ varie dans $[0,2\pi[$. Ainsi, l'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$B=\left\{(r,\theta):r\in]0,1],\ \theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\right\}.$$

La fonction à intégrer est la fonction $g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))=\ r\sin(\theta)e^{r\cos(\theta)}$ multipliée par le jacobien égal à r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\int_0^1\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}r^2\sin(\theta)e^{r\cos(\theta)}\,d\theta\right)\,dr=\int_0^1 -r\left[e^{r\cos(\theta)}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\,dr=\int_0^1 r\left(e^{\frac{r}{2}}-e^{\frac{-r}{2}}\right)\,dr$$

$$=\left[2r\left(e^{\frac{r}{2}}+e^{\frac{-r}{2}}\right)\right]_0^1-2\int_0^1\left(e^{\frac{r}{2}}+e^{\frac{-r}{2}}\right)\,dr=2\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{-1}{2}}\right)-4\left[e^{\frac{r}{2}}-e^{\frac{-r}{2}}\right]_0^1$$

$$=2\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{\frac{-1}{2}}\right)-4\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{-1}{2}}\right)=-2\sqrt{e}+\frac{6}{\sqrt{e}}.$$

b) Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{4^m}{2^{3m+1}},\qquad\qquad (ii)\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(\sin(\frac{\pi}{6}))^m}{m!}.$$

Solution. La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{4^m}{2^{3m+1}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{8}\right)^m$, série géométrique convergente puisque la raison $\frac{1}{2}\in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(\sin(\frac{\pi}{6}))^m}{m!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\frac{1}{2}) - 1 = \sqrt{e} - 1$.