Université de Liège

1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

Corrigé de l'interrogation de math du 24 octobre 2011

Version 4 novembre 2011

1. **a) (i) Quel est le domaine de définition de la fonction sinus ? Quelle est l'image de la fonction sinus ?**
   (ii) Comment définit-on géométriquement le sinus du réel -2 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.
   b) Soient deux réels b, c. Sous quelle condition l'équation suivante (en la variable x)
   $$x^2 + bx + c = 0$$
   admet-elle au moins une solution ? Justifier votre réponse.
   c) Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation
   $$\cos(2x) = \sin(4x)$$

   Solution. a) Voir cours.

   b) L'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet au moins une solution si $\Delta = b^2 - 4c \geq 0$.
   En effet, l'équation est équivalente à
   $$x^2 + 2.\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$
   Dès lors,
   • si $\Delta = b^2 - 4c = 0$, l'équation admet la seule solution $x = -\dfrac{b}{2}$.
   • si $\Delta = b^2 - 4c > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes $x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}$.

   c) L'équation est équivalente à
   $$\begin{aligned}
   \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(2x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \ \text{ ou } \ 2x = -\frac{\pi}{2} + 4x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right) \\
   &\Leftrightarrow \quad \left(6x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ ou } \ -2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right) \\
   &\Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right)
   \end{aligned}$$
   Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$ sont $\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{25\pi}{12}, \dfrac{9\pi}{4}$ et $\dfrac{29\pi}{12}$.

   Autre résolution :
   $$\begin{aligned}
   \cos(2x) = \sin(4x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) \\
   &\Leftrightarrow \quad \cos(2x)(1 - 2\sin(2x)) = 0 \\
   &\Leftrightarrow \quad \left(\cos(2x) = 0 \ \text{ ou } \ \sin(2x) = \frac{1}{2}\right) \\
   &\Leftrightarrow \quad \left(2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ ou } \ 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right) \\
   &\Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \text{ ou } \ 2x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right)
   \end{aligned}$$
   Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$ sont $\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{25\pi}{12}, \dfrac{9\pi}{4}$ et $\dfrac{29\pi}{12}$.

2. **Déterminer les solutions réelles (x) de l'équation suivante**
   $$(x+1)\ |x+1| \ + \ 2x \ = \ -3$$
   Solution. Si $x \geq -1$, l'équation s'écrit $(x+1)^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$ et a pour solution -2. Comme on travaille avec $x \geq -1$, cette solution est à rejeter.

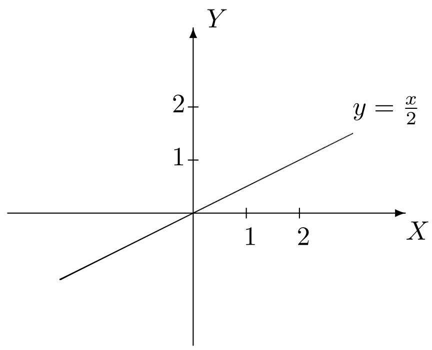
Si $x \leq -1$, l'équation s'écrit $-(x+1)^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0$ et ses solutions sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Comme on travaille avec $x \leq -1$, la seule solution acceptable est donc $-\sqrt{2}$.
Ainsi, l'équation donnée a pour ensemble de solutions $S = \{-\sqrt{2}\}$.

3. **On se place dans un repère orthonormé du plan. Déterminer des équations paramétriques et l'équation cartésienne de la droite orthogonale à la droite d'équation $2x + y + 1 = 0$ et passant par l'origine. Représenter cette droite.**

   Solution. Un vecteur directeur de la droite d'équation $2x+y+1 = 0$ a pour composantes $(1, -2)$ par exemple. Un vecteur directeur de toute droite orthogonale à cette droite a donc pour composantes $(2, 1)$ par exemple puisque le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul.
   Ainsi, des équations paramétriques de la droite demandée sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2r \\ y = r \end{array} \right. , \; r \in \mathbb{R}.$$

   Cette droite a pour équation cartésienne $x - 2y = 0$.

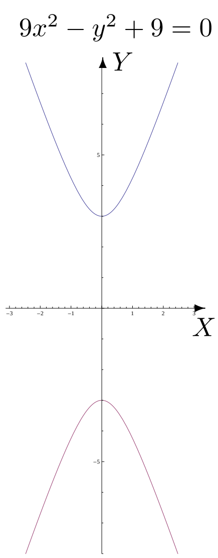


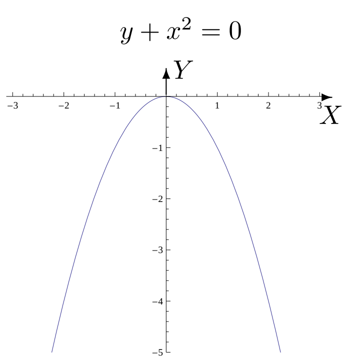
4. **On se place dans un repère orthonormé et on considère les équations cartésiennes suivantes**

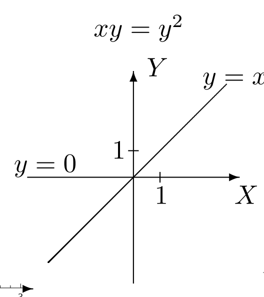
   (1) $9x^2 - y^2 + 9 = 0$ (2) $y + x^2 = 0$ (3) $xy = y^2$ (4) $9x^2 + y^2 + 9 = 0$, (5) $9x^2 + y^2 - 9 = 0$

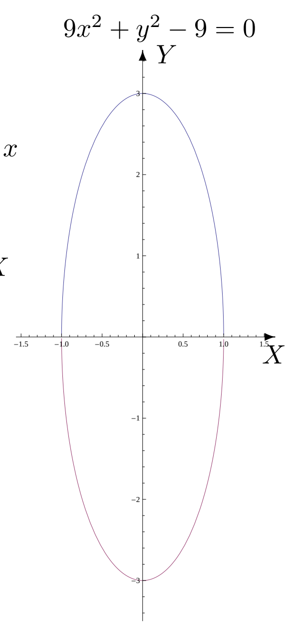
   Représenter graphiquement l'ensemble des points que ces équations déterminent ; chaque représentation doit être faite dans un repère différent. S'il s'agit de coniques, en préciser le type et l'excentricité.

   Solution. Aucun point ne vérifie l'équation (4).









L'équation (1) est celle d'une hyperbole dont l'excentricité vaut $e = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.
L'équation (2) est celle d'une parabole dont l'excentricité vaut $e = 1$.
L'équation (5) est celle d'une ellipse dont l'excentricité vaut$e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Problèmes élémentaires

a) Ensemble, Juliette et Morgane ont actuellement 25 ans au total. Dans 10 ans, Juliette aura deux fois l'âge que Morgane avait à la naissance de Juliette. Quels sont les âges actuels de Morgane et Juliette ?

Solution. Actuellement, Juliette a x ans et Morgane en a $(25-x)$. A la naissance de Juliette, il y a x ans, Morgane était âgée de $(25 - 2x)$ ans. Dans 10 ans, Juliette aura $(x + 10)$ ans. Dès lors, on a l'équation

$$x + 10 = 2(25 - 2x) \Leftrightarrow x + 10 = 50 - 4x \Leftrightarrow 5x = 40 \Leftrightarrow x = 8$$

Ainsi, actuellement Juliette a 8 ans et Morgane a 25-8=17 ans.

b) Un pharmacien a 0,02 dm^3 d'une solution qui contient une concentration de glucose à 25 %. Combien de ml de glucose doit-il ajouter pour obtenir une concentration à 60 % ?

Solution. Comme 0,02 dm^3= 20 ml, la solution donnée contient $20\ .\ 0,25 = 5$ ml de glucose pur. Si on note x le nombre de ml de glucose pur à ajouter, on a l'équation

$$5 + x = 0,6(20 + x) \Leftrightarrow 5 + x = 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,4x = 7 \Leftrightarrow x = 17,5.$$

On doit donc ajouter 17,5 ml de glucose pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 60 %.