1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 10 : correction
(Chimie, Géographie et Physique)

Version 19 avril 2012

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

$$\text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^3 - j + 2}{j^3 + 5j^2 + 10} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2 + 1} \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 1}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{7n + 15} \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n^3 + 1}} \ (p \in \mathbb{N}_0) \quad \text{g) } \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ak} \ (a \in \mathbb{R}) \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \ln(3)}$$

a) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{\sqrt{2}}{5} \in]-1, 1[$
c) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc série convergente.
d) Série alternée dont le terme général décroît vers 0 donc convergente. Cette série est même absolument convergente car son terme général pris en valeur absolue peut être comparé à celui d'une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$.
e) Comparaison avec la série harmonique divergente donc série divergente.
f) Si $p = 1$: comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente ; si $p > 1$: comparaison avec une série de Riemann divergente car $\alpha < 1$ donc série divergente. Remarquons que si $p \geq 3$, le terme général ne tend pas vers 0.
g) Si $a > 0$: série géométrique convergente car $e^{-a} \in]-1, 1[$; si $a \leq 0$: série géométrique divergente car $e^{-a} \notin]-1, 1[$
h) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $0 < ab < c$ et $c \neq 0$)** :

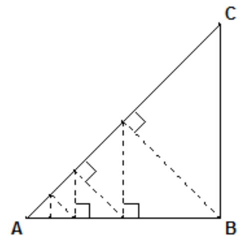
$$\text{a) } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^{j+3}}{j! \ln(4)} \quad \text{b) } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^j \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 5k + 6} \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n b^{n+1}}{c^{n+2}}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{f) } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{g) } \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{k}{k+3}\right)$$

a) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $\ln^2(2)$
b) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi - \sqrt{3}}$
c) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
d) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{b}{c(c - ab)}$
e) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
f) Série convergente ; la somme de la série vaut $-\ln 2$
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

3. **Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $|BC| = a$ cm ($a > 0$) comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment $[AC]$. Lorsqu'elle atteint ce segment, elle**

tourne et revient sur le segment $[AB]$ en prenant une route perpendiculaire à $[AB]$. Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A. Quelle sera la distance parcourue par la puce ?



La distance parcourue par le puce sera $a\ \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}+1)$ cm.