1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste de la répétition 10 (Géologie) : correction

Version 27 mars 2012

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\frac{j^2+1}{j^3+1}$ b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j^3+\sqrt{3}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{n}{n^3+1}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}2^{2k}.3^{1-k}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$

a) Série alternée dont le terme général décroît vers 0 donc convergente.
b) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha=3>1$ donc série convergente.
c) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
d) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
e) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha=2>1$ donc série convergente.
f) Série géométrique divergente car $\frac{4}{3}\notin]-1,1[$
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent** :

a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right)$

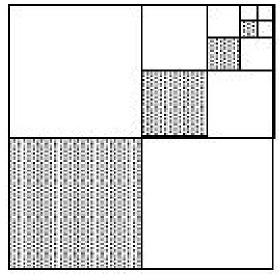
a) Série géométrique convergente car $\frac{1}{3}\in\,]-1,1[$; la somme de la série vaut $\frac{1}{6}$

b) Série définissant l'exponentielle de 3 ; la somme de la série vaut e^3-4
c) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
d) Série convergente ; la somme de la série vaut $\sin(1)$

3. **Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel** $1,23333\ldots$**.**

Le réel $1,23333\ldots=1,2+3.10^{-2}\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}10^{-j}=\frac{37}{30}$.

4. **Un carré de** $4\,cm$ **de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?**



La surface ombrée totale vaut $\dfrac{16}{3}$ cm^2.

5. **Une balle est lâchée d'une hauteur de $2\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?**

   Quand la balle sera complètement arrêtée, elle aura parcouru 14 m.

6. **Démontrer l'égalité**

$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \ldots = \tan^2(\theta).$$

   A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

   Cette égalité est vraie si et seulement si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.