1, 2, 3... Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques

Liste de la répétition 10 (Informatique) : correction

Version 27 mars 2012

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2+1}{j^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^3+\sqrt{3}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{2n}.3^{1-n}$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$
c) Série alternée dont le terme général décroît vers 0 donc convergente.
d) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$ donc série convergente.
e) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
f) Série alternée dont le terme général décroît vers 0 donc convergente.
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
h) Série géométrique divergente car $\frac{4}{3} \notin]-1, 1[$

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :**

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^j$ b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}$

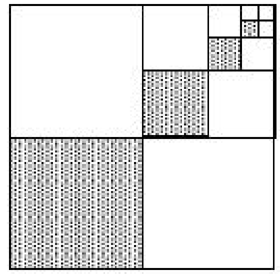
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{3k-1}}{k!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}\right)$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{2} \notin]-1, 1[$
b) Série géométrique convergente car $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$; la somme de la série vaut $\frac{1}{6}$
c) Série définissant l'exponentielle de 3 ; la somme de la série vaut $e^3 - 4$
d) Série convergente dont la somme vaut $\frac{1}{2}$
e) Série géométrique convergente car $\frac{3}{5} \in]-1, 1[$; la somme de la série vaut $\frac{45}{2}$
f) Série définissant l'exponentielle de e^3 ; la somme de la série vaut $\frac{1}{e}\exp(e^3)$
g) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
h) Série convergente ; la somme de la série vaut $\sin(1)$

3. **Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel $1,23333\ldots$.**

Le réel $\displaystyle 1,23333\ldots = 1,2 + 3.10^{-2} \sum_{j=0}^{+\infty} 10^{-j} = \frac{37}{30}$.

4. **Un carré de $4\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?**



La surface ombrée totale vaut $\dfrac{16}{3}$ cm^2.

5. **Une balle est lâchée d'une hauteur de $2\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?**

   Quand la balle sera complètement arrêtée, elle aura parcouru 14 m.

6. **Démontrer l'égalité**

$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \ldots = \tan^2(\theta).$$

   A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

   Cette égalité est vraie si et seulement si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.