1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématique
Liste type numéro 11
Répétition 11 : correction

Version 24 novembre 2011

I. Calculs d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(|x|))\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$ (9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx$

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{10\sqrt{2}}{3}$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx = -2$	(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(|x|))\,dx = \frac{e^2+1}{4}$
(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{12}$	(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx = \frac{1}{12}\ln 2$	(6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx = 1$
(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{8}$	(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \quad \nexists$	(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(2\sqrt{3}-1)}{10}$

II. Divers

En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est φ, est donnée par

$$y(\varphi) = R\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos u}du.$$

Montrer que

$$y = R\;\ln\left(\left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\right).$$