1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématique
Liste type numéro 12
Répétition 12 : correction

Version 29 novembre 2011

I. Quelques manipulations

1. **L'équation différentielle** $(D_t y)^2 = 2y$ **est-elle linéaire ?**

   Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation.

2. **Montrer que la fonction** $g(t) = 3t^2 - 6t + 2,\ (t \in \mathbb{R})$ **vérifie le système** $\left\{\begin{array}{l}(D_t y)^2 = 12(y+1)\\ y(0) = 2\\ y(2) = 2\end{array}\right.$

   On a $g(0) = 2$ et $g(2) = 2$ ainsi que $Dg(t) = 6t - 6$. En remplaçant Dy et y respectivement par Dg et g dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. **Montrer que**[1] **la fonction** $g(t) = \operatorname{cotg} t - \dfrac{1}{\sin t},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$**, vérifie l'équation** $2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = -1$.

   On a $Dg(t) = \dfrac{-1+\cos(t)}{\sin^2(t)}$ et en remplaçant $\dfrac{dy}{dt}$ et y respectivement par $Dg(t)$ et g dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

II. Equations différentielles, résolutions

1. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

   1) $4Df(x) + 2if(x) = 0$ 2)$D^2 f = 2f$

   3)$D^2 f = 0$ 4) $Df(x) - f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

   5) $Df(x) - 2f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$

   Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

   1) $f(x) = Ce^{-ix/2},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

   2) $f(x) = C_1 e^{-\sqrt{2}\,x} + C_2 e^{\sqrt{2}\,x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   3) $f(x) = C_1 x + C_2,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   4) $f(x) = (C - \ln(|e^{-x} - 1|))e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe

   5) $f(x) = (C + e^{-x} + \ln(|e^{-x} - 1))e^{2x},\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe

1. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2f}{dx^2}$