1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2011-2012

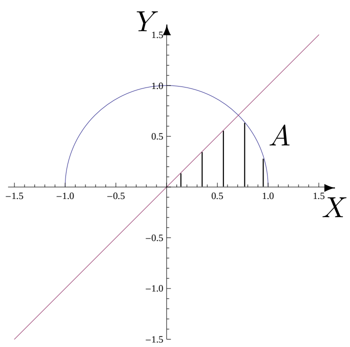
Exercices de mathématiques
Répétition 1 Biologie : correction

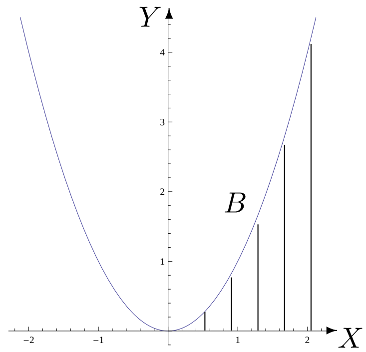
Version 2 février 2012

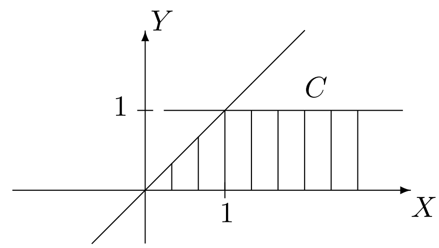
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

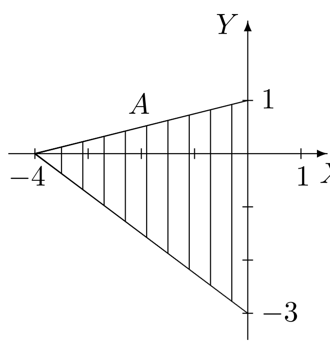
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0,1]\}$

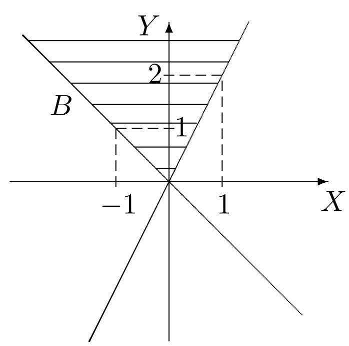


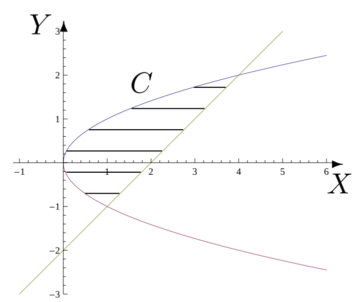




2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.





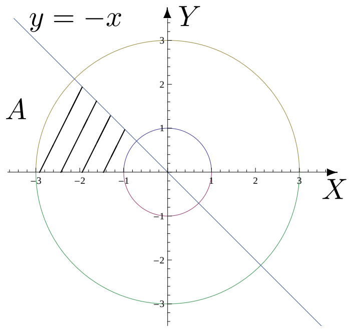


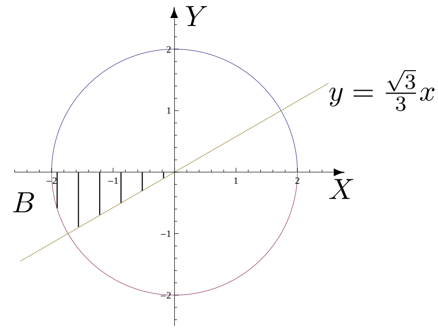
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4,0],\ y \in [-\frac{3}{4}x - 3, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3,0],\ x \in [-\frac{4}{3}y - 4, 0]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [4(y-1),\ 0]\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [-y,\ \frac{y}{2}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty,0],\ y \in [-x,+\infty[\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in [2x,\ +\infty[\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,2],\ x \in [y^2, y+2]\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,4],\ y \in [x-2, \sqrt{x}]\}$.

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble.**





Les descriptions analytiques sont les suivantes

$$A = \left\{(r, \theta) : r \in [1, 3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(r, \theta) : r \in]0, 2],\ \theta \in \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]\right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x \mapsto |x^2 - 4|$ **et** $x_0 = 1$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ **et** $x_0 = 2$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 1 vaut -2 et celle de g en 2 vaut $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-1, 1[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\ln(2x))$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right[$ et sa dérivée vaut $DF(x) = \frac{1}{x}(Df)(\ln(2x))$.
   b) Même question pour g dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ avec $G(x) = g(\arcsin(2x + 1))$.
   Le domaine de dérivabilité de G est $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et sa dérivée vaut

$$DG(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}(Dg)(\arcsin(2x + 1)).$$

III. Cacul intégral

1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0, 1]$, la fonction $f_1 : x \mapsto a^2 \sin(ax)$ est-elle intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, \frac{\pi}{2}]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\left(1 - \cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right)$.

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{-a^2}}{a^2 + x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?
   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale

vaut $a \ln 2 \;.\; e^{-a^2}$.

c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2+a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
La fonction est continue sur$[a, +\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ donc sur $[a, +\infty[$. Son intégrale vaut $\dfrac{\pi\sqrt{a}}{4a}$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**

$$a) \int_0^1 \ln(x)\; dx \qquad\qquad b) \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\; dx$$

Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut -1 et la deuxième $\frac{1}{4}\ln 3$.

3. **On considère l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\;\; y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{7}{6}$.