1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

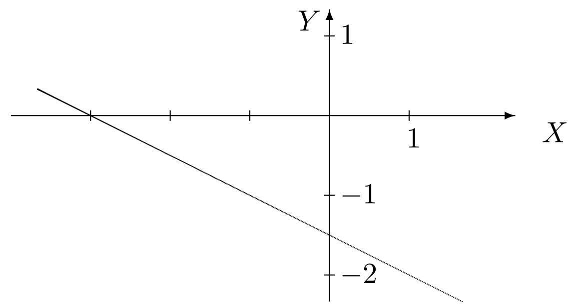
Exercices de mathématiques
Liste type numéro 2
Répétition 2 : correction

Version 22 septembre 2011(V1 : 29/08/09)

I. Equations cartésiennes de droites

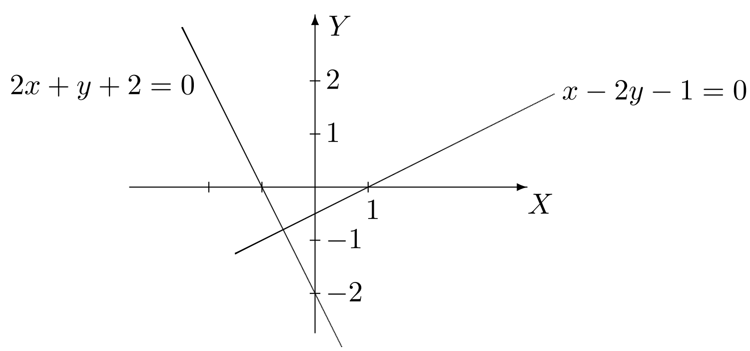
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. **Sans en déterminer l'équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(1, -2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{1}{2}$.**



2. **Donner l'équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(1, 0)$ et orthogonale à la droite d'équation $2x + y + 2 = 0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.**

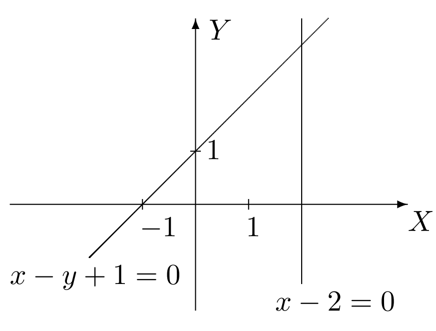
   L'équation cartésienne demandée est $x - 2y - 1 = 0$.



3. **a) Donner l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(2, 3)$ et $(1, 2)$ ainsi que celle de la droite passant par $(2, 3)$ et $(2, 0)$.**

   La première droite a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$; la deuxième a pour équation $x - 2 = 0$.

   b) Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.



4. **On considère la droite d'équation cartésienne** $2x + y + 2 = 0$.

   a) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.

   Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes $(1, -2)$ (ou tout autre multiple non nul) .

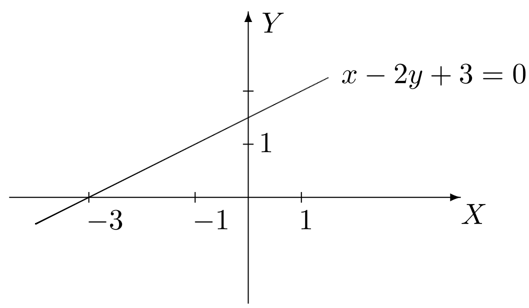
b) Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
Un point de cette droite a pour coordonnées $(-1, 0)$ par exemple.
c) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
Des équations paramétriques cartésiennes de cette droite sont données par

$$\begin{cases} x = -1 + r \\ y = -2r \end{cases}, \ r \in \mathbb{R}$$

d) La droite passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?
Vu les équations paramétriques données au point précédent, ce point correspond à $r = 1 - \sqrt{2}$.

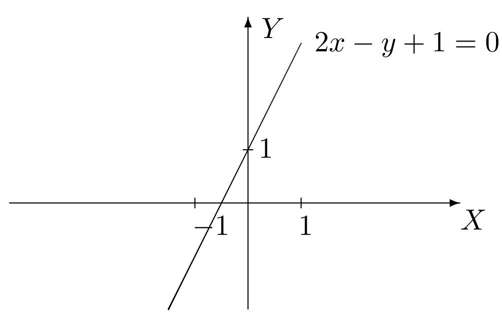
II. Résolution de systèmes linéaires

1. **a) Si on considère l'équation $2y - x = 3$, représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe ?**
   Cette courbe est une droite dont voici la représentation graphique.



   b) Résoudre le système $\begin{cases} y + x = 0 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$
   Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.
   L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \{(-1, 1)\}$.
   c) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
   Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites sécantes au point de coordonnées $(-1, 1)$.

2. **a) Dans le plan, représenter graphiquement les solutions du système** $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 3 \end{cases}$

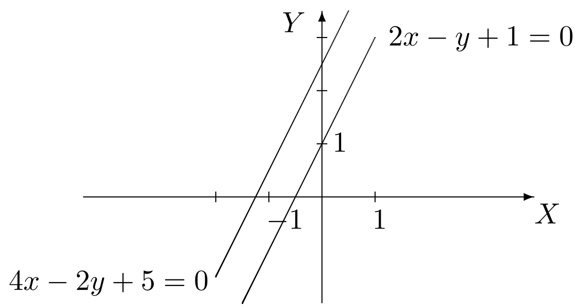


   b) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?

Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites parallèles confondues.

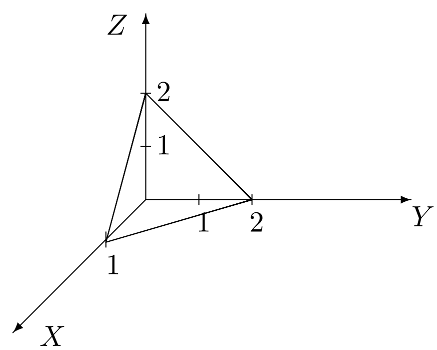
c) Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.
Son ensemble de solutions est l'ensemble $S = \{(x, 2x+1) : x \in \mathbb{R}\}$.

d) Faire de même avec le système $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \end{array}\right.$



Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites parallèles et distinctes. L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \emptyset$.

3. **a) Si on considère l'équation $y + 2x + z = 2$, comment peut-on représenter graphiquement les solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?**
Cette équation est l'équation cartésienne d'un plan dont voici la représentation graphique.



b) Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.
Trois cas sont possibles :
1) 2 plans sécants ; ils ont une droite de points en commun et leur ensemble de solutions dépend d'un paramètre
2) 2 plans parallèles confondus ; ils ont tous leurs points en commun et leur ensemble de solutions dépend de 2 paramètres
3) 2 plans parallèles distincts ; ils n'ont aucun point en commun et leur ensemble de solutions est l'ensemble vide.

c) Résoudre $\left\{\begin{array}{l} y + 2x + z = 2 \\ y - 2x + 2z = 0 \end{array}\right.$
L'ensemble de solutions est donné par $S = \{(x, 4 - 6x, 4x - 2) : x \in \mathbb{R}\}$.

III. Trigonométrie

1. **a) Si** $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$**, dans quel quadrant travaille-t-on ?**
   On travaille dans le quatrième quadrant.
   b) Dans ce quadrant, on sait que $\operatorname{tg}(x) = -\frac{4}{3}$**. Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques ?**
   On a $\quad \operatorname{cotg}(x) = -\dfrac{3}{4}, \qquad \cos(x) = \dfrac{3}{5} \quad$ et $\quad \sin(x) = -\dfrac{4}{5}$.
2. **a) Pour quelle(s) valeur(s) de** x **l'expression** $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) - \dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)}$ **est-elle définie ?**
   L'expression est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
   b) En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x**.**
   Cette expression vaut 0 ; elle est donc indépendante de x.
3. **a) Rapprocher** $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ **d'une autre expression du même type qui permettrait de simplifier cette expression. Laquelle envisager ?**
   On peut envisager le carré d'une somme de 2 termes donc, par exemple, l'expression $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,\ a, b \in \mathbb{R}$.
   b) Transformer l'expression ci-dessus en utilisant la formule trouvée pour montrer que cette expression est indépendante de x**.**
   L'expression donnée peut donc s'écrire sous la forme $(\sin^2(x) + \cos^2(x))^2 = 1$ et est donc indépendante de x.
4. **a) Parmi les formules de trigonométrie, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de sinus cosinus ? La citer.**
   Pour transformer un double produit de sinus cosinus, on utilise la formule
   $$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b),\ a, b \in \mathbb{R}.$$
   b) Prouver que $4\sin\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\dfrac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - 1$**.**
5. **a) Résoudre l'équation** $\sin(4x) = \cos(2x)$ **(note :** x **est l'inconnue réelle)**
   Cette équation a pour ensemble de solutions
   $$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{12} + k\pi,\ \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
   b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
   Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{17\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{4}$.
6. **a) Résoudre l'équation** $\cos(4x) = \cos(2x)$ **(note :** x **est l'inconnue réelle)**
   Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{ \dfrac{k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
   b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$**.**
   Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$.
7. **a) Si un produit de 2 facteurs est négatif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?**
   Si un produit de 2 facteurs est négatif alors ces facteurs sont de signe contraire, l'un positif

et l'autre négatif.
b) Transformer $\sin(2x)$ **en un produit de 2 facteurs.**
On a la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.
c) Résoudre $\sin(2x) \leq \cos(x)$ **(note :** x **est l'inconnue réelle)**
L'ensemble des solutions est donné par

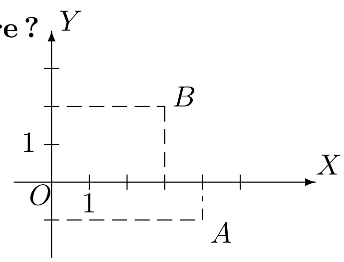
$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \right).$$

d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$**.**

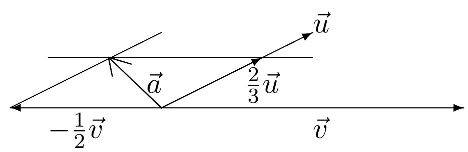
Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

IV. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

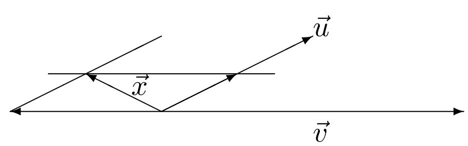
1. **a) Quelles sont les composantes des vecteurs** $\overrightarrow{OA}$ **et** $\overrightarrow{OB}$ **dans la base correspondant au repère orthonormé ci-contre ?**
Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont respectivement $(4, -1)$ et $(3, 2)$.
b) Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$
Les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont$(-1, 3)$.



2. **Soit la base du plan définie par les vecteurs** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$**.**
a) Si $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$**, donner les composantes de** $\vec{a}$ **dans la base** $\vec{u},\ \vec{v}$**.**
Dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$, les composantes de $\vec{a}$ sont $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$.
b) Représenter $\vec{a}$**.**



c) On considère le vecteur $\vec{x}$**. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **puis en donner les composantes dans cette base.**



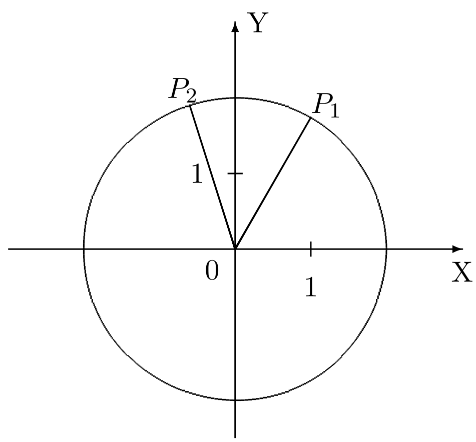
Comme $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, ses composantes dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$ sont $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

3. **On fixe une base orthonormée de l'espace, notée** $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\ \vec{u_3}$**.**
a) Si $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$**, quelles sont les composantes de** $\vec{a}$ **dans cette base ?**
Dans cette base, les composantes de $\vec{a}$ sont $(\frac{1}{2}, 2, 0)$.

b) De même pour $\vec{b} = \vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3}$.
Dans cette base, les composantes de $\vec{b}$ sont $(1, 1, -1)$.
c) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$.
Le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$ vaut $\frac{5}{2}$.
d) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.
Le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$ est le vecteur de composantes $(2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
e) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{a}$, celles de $\vec{y} = (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}$ et celles de $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.
Les composantes des différents vecteurs sont les suivantes

$$\vec{x}\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right), \qquad \vec{y}\left(\frac{5}{4}, 5, 0\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{z}\left(3, -\frac{3}{4}, -\frac{17}{4}\right).$$

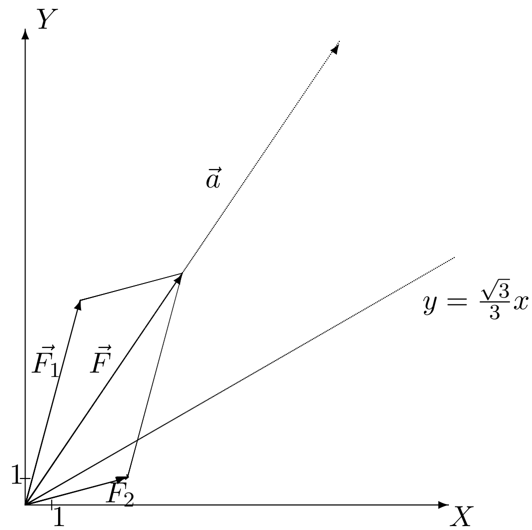
4. **Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $0 < x_1 < y_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ de $30°$ dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine O. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité P_2 du vecteur obtenu après rotation.**
   a) Représenter graphiquement la situation.



   b) En faisant appel à la trigonométrie, écrire les coordonnées de P_1 sous une autre forme.
   Si la distance de P_1 à O vaut R, réel strictement positif, alors P_1 a pour coordonnées $(R\cos(\theta),\ R\sin(\theta))$ avec $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.
   c) En déduire les coordonnées de P_2.
   Les coordonnées de P_2 sont alors $(R\cos(\theta + 30°),\ R\sin(\theta + 30°))$
   d) Donner les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1.
   Les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1 sont $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x_1 - y_1, x_1 + \sqrt{3}\,y_1)$.

5. **Un palet de hockey de 0,5 kg glisse (la friction est négligeable) sur une patinoire (horizontale) suite à l'action de 2 forces horizontales. La première, d'une intensité de 8 N, fait un angle de $45°$ avec la direction d'une droite qui, dans un repère orthonormé, a pour équation cartésienne $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. La seconde a une intensité de 4 N et fait un angle de $-15°$ avec cette même direction.**
   Déterminer la valeur de l'accélération du palet ($\vec{F} = m\vec{a}$) ainsi que sa projection orthogonale sur une droite dont la direction est orthogonale à celle de la droite donnée.

a) Représenter graphiquement le problème ci-dessus.



b) Quelle est la mesure de l'angle formé par la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ avec l'axe des abscisses ?
La droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ fait un angle de 30° avec l'axe des abscisses.
c) Quel est l'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ avec l'axe des abscisses ? Même question pour $\overrightarrow{F_2}$.
L'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ avec l'axe des abscisses vaut 75° ; celui formé par $\overrightarrow{F_2}$ vaut 15°.
d) Donner les composantes de $\overrightarrow{F_1}$ et de $\overrightarrow{F_2}$ dans la base correspondant au repère orthonormé en simplifiant au maximum leur expression.
Dans la base correspondant au repère orthonormé, les composantes de $\overrightarrow{F_1}$ sont $(2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1), 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1))$ et celles de $\overrightarrow{F_2}$ sont $(\sqrt{2}(\sqrt{3}+1), \sqrt{2}(\sqrt{3}-1))$.
e) Déterminer la résultante de ces 2 forces ainsi que ses composantes.
La résultante de ces 2 forces a pour composantes $(\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1), \sqrt{2}(3\sqrt{3}+1))$.
f) Quelles sont les composantes de l'accélération $\vec{a}$?
Les composantes de l'accélération sont $(2\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1), 2\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1))$.
g) Donner les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée.
Les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée sont $(1, -\sqrt{3})$ (ou tout multiple non nul).
h) Quelle est l'expression vectorielle de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle ?
L'expression vectorielle de la projection orthogonale $\vec{u'}$ d'un vecteur $\vec{u}$ sur une droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul $\vec{v}$ est donnée par

$$\vec{u'} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}.$$

i) Déterminer la projection orthogonale demandée de $\vec{a}$.
La projection orthogonale demandée a pour composantes $(\sqrt{2}(\sqrt{3}-5), \sqrt{2}(5\sqrt{3}-3))$.