Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Répétition 2 Biologie : correction

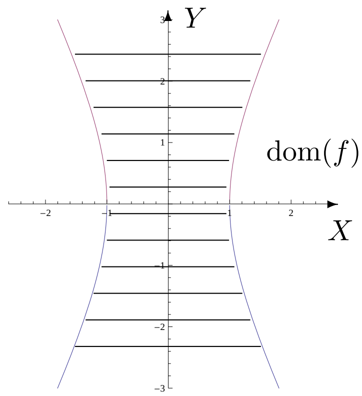
Version 8 février 2012

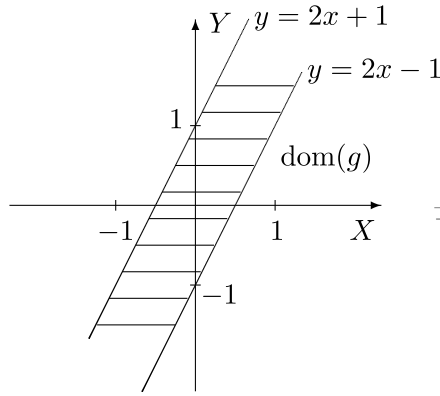
I. Définitions et représentations graphiques

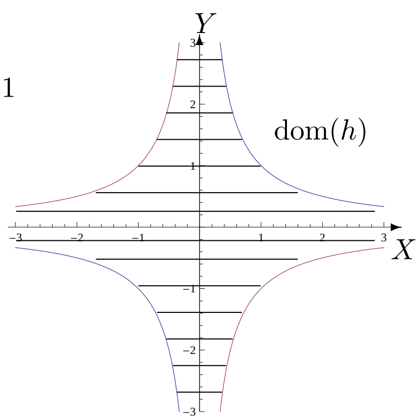
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x-y|}, \quad h(x,y) = \arcos(xy).$$

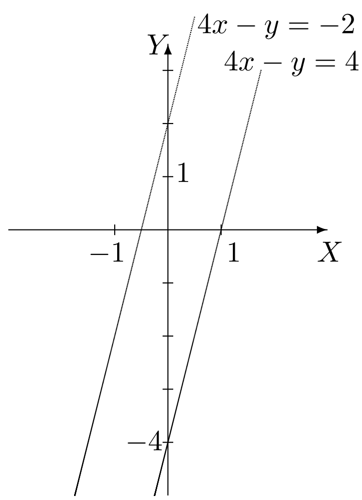
Les domaines de définition sont les suivants :
• $\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble.
• $\mathrm{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 2x - y \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble.
• $\mathrm{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble.

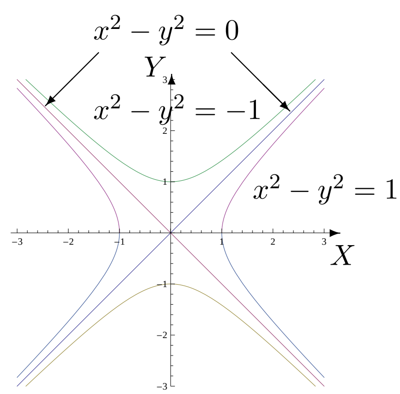


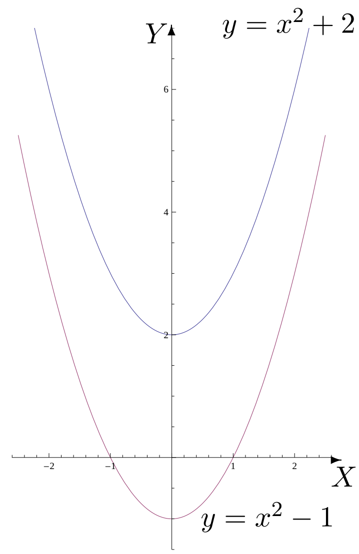




2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si**
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$

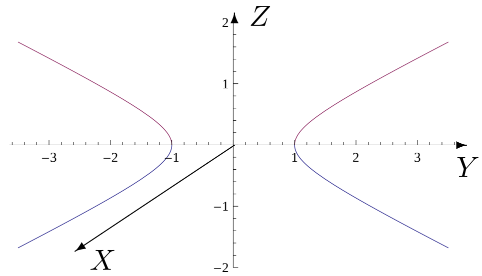






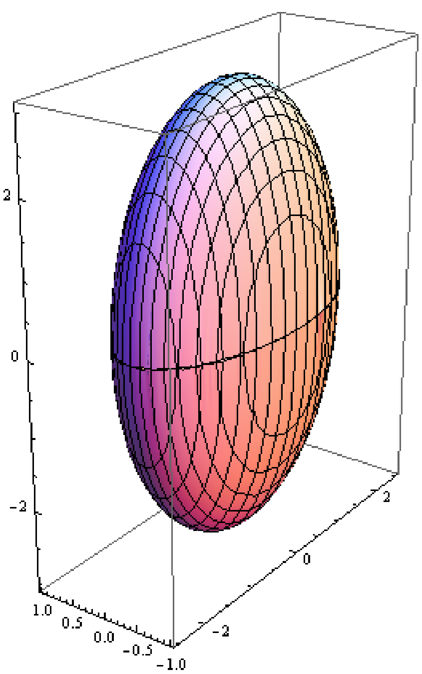
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne**

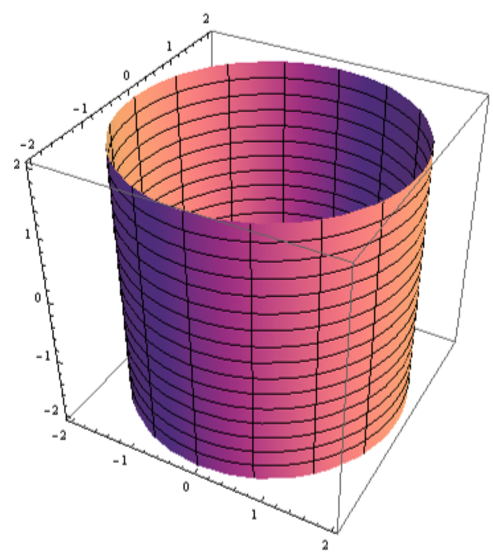
$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ **dans le plan d'équation** $z = 0$ **puis dans celui d'équation** $x = 0$**. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
La trace dans le plan d'équation $z = 0$ est le cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1 ; celle dans le plan d'équation $x = 0$ est une hyperbole (cf. graphique).
Cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b) x^2 + y^2 = 4.$$



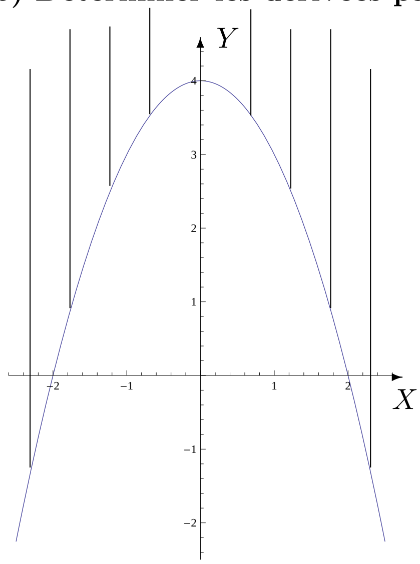


II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction** f **donnée explicitement par** $f(x, y) = 3x^2 + xy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ **est dérivable par rapport à sa première variable au point** $(-1, 2)$ **et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut -4.
2. **On donne les fonctions** f**,** g **et** h **par**

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x, y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \textbf{et} \quad h(x, y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 4 > 0\}$. La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y - 4}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y - 4}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = -2xy^2 \sin(x^2y^2 + 4y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = -(2x^2y + 4)\sin(x^2y^2 + 4y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des abscisses. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \left(2x - \frac{x^2}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.**
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

   Les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \dfrac{3(x^2 - 4y^2)}{(x^2 + 4y^2)^2}$.

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.**
   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

   a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

   $$(2x_1x_2 \sin(3x_3),\ x_1^2 \sin(3x_3),\ 3x_1^2 x_2 \cos(3x_3)).$$

   b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

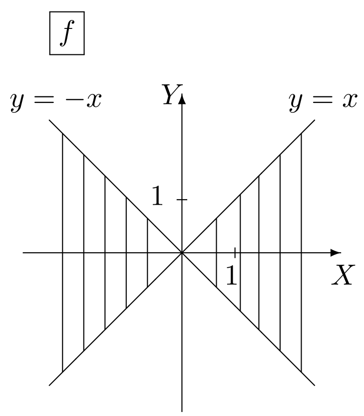
   $$\left((2x + x^2y^2\sqrt{z})e^{xy^2\sqrt{z}},\ 2x^3y\sqrt{z}\, e^{xy^2\sqrt{z}},\ \frac{x^3y^2}{2\sqrt{z}}\, e^{xy^2\sqrt{z}}\right).$$

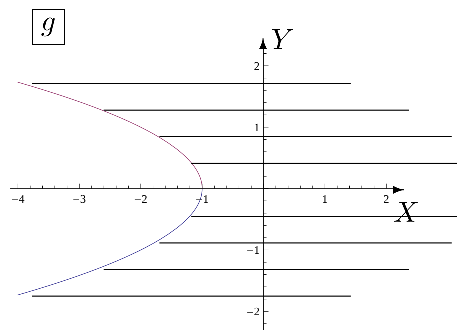
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

$$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y)=\exp(\sqrt{x+y^2+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_xf(x,y)+|y|D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t)=f\left(\frac{1}{t},t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t)=g(\sin^2 t,\cos t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

a) Pour f, on a $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq \frac{y}{x}\leq 1,\ x\neq 0\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<\frac{y}{x}<1\}$.
Pour g, on a $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y^2+1\geq 0\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y^2+1>0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :





Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.

Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$|x|D_xf(x,y)+|y|D_yf(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy\geq 0\\ \dfrac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}} & \text{si} \quad xy<0\end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t)=f\left(\frac{1}{t},t\right)$ est donnée par $F(t)=\arcsin(t^2)$; son domaine de dérivabilité est $]-1,1[$ et sa dérivée est

$$DF(t)=\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t)=g(\sin^2 t,\cos t)$ est donnée par $G(t)=\exp(\sqrt{2})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $DG(t)=0$.