Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 3
Répétition 3 : correction

Version 14 septembre 2011(V1 : 29/08/09)

I. Les coniques

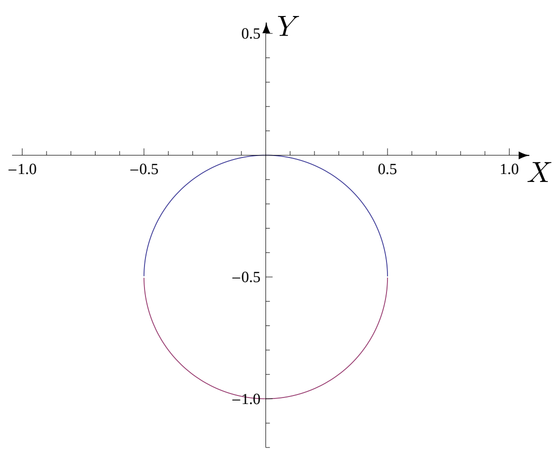
1. **Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes**

$$(1)\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 4 \qquad (2)\ x = y^2 + 2 \qquad (3)\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 4 \qquad (4)\ x^2 + y^2 + y = 0$$

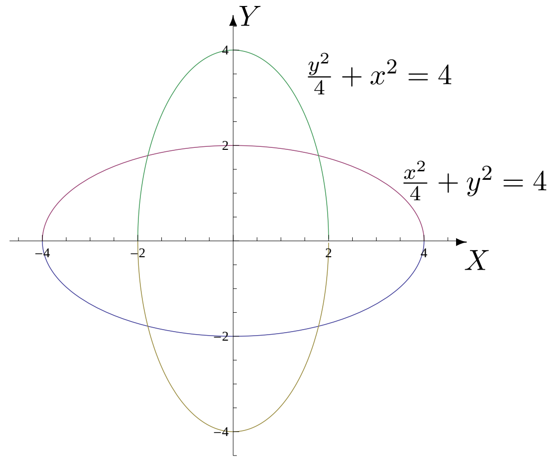
$$(5)\ x^2 = -y^2 \qquad (6)\ \frac{y^2}{4} - x^2 = 4 \qquad (7)\ y = xy^2 \qquad (8)\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 4$$

Quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
a) d'un cercle ?
Les équations (4) et (5) pourraient être l'équation cartésienne d'un cercle.
b) d'une ellipse ?
Les équations (3) et (8) pourraient être l'équation cartésienne d'une ellipse.
c) d'une hyperbole ?
Les équations (1) et (6) pourraient être l'équation cartésienne d'une hyperbole.
d) d'une parabole ?
L'équation (2) pourrait être l'équation cartésienne d'une parabole.

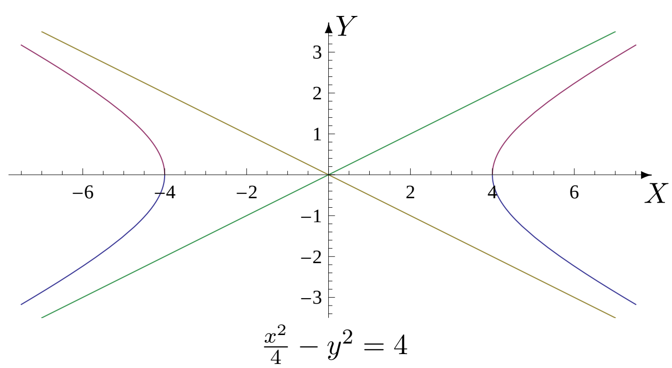
2. **a) Ecrire $y^2 + y$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.**
On a $y^2 + y = (y^2 + y + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.
b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$. Le représenter graphiquement.
Le centre du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$ a pour coordonnées $(0, -\frac{1}{2})$ et son rayon vaut $\frac{1}{2}$.

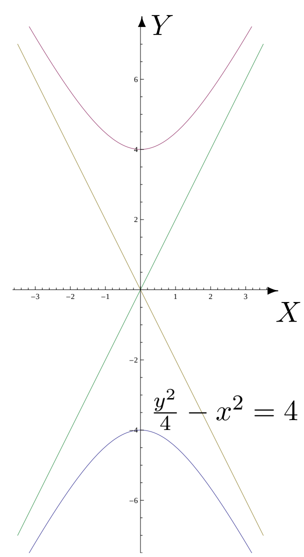


c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.
L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, -2)$.
L'ellipse d'équation $\frac{y^2}{4} + x^2 = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ et $(0, -4)$.

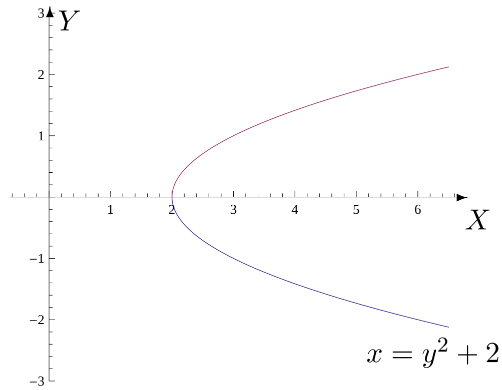


d) Donner les coordonnées des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
Les foyers de l'ellipse d'équation (3) ont pour coordonnées $(2\sqrt{3}, 0)$ et $(-2\sqrt{3}, 0)$; son excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les foyers de l'ellipse d'équation (8) ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{3})$ et $(0, -2\sqrt{3})$; son excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
e) Donner les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{5}, 0)$ et $(-2\sqrt{5}, 0)$, les sommets ont pour coordonnées $(4, 0)$ et $(-4, 0)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = \frac{x}{2}$ et $y = -\frac{x}{2}$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{4} - x^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{5})$ et $(0, -2\sqrt{5})$, les sommets ont pour coordonnées $(0, 4)$ et $(0, -4)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = 2x$ et $y = -2x$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.

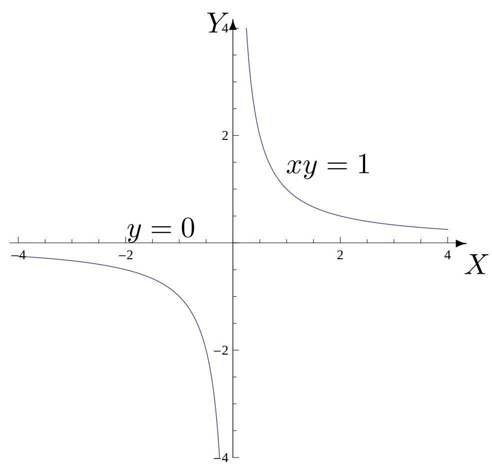




g) Donner les coordonnées du foyer et la valeur de l'excentricité des éventuelles paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
La parabole d'équation $x = y^2 + 2$ a un foyer dont les coordonnées sont $(\frac{9}{4}, 0)$ et son excentricité vaut $e = 1$.



h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.
L'équation $x^2 + y^2 = 0$ n'est vérifiée que par le point de coordonnées $(0, 0)$.
L'équation $y = xy^2 \Leftrightarrow y(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow (y = 0$ ou $xy = 1)$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y = 0$ et l'hyperbole équilatère d'équation $y = 1/x$.

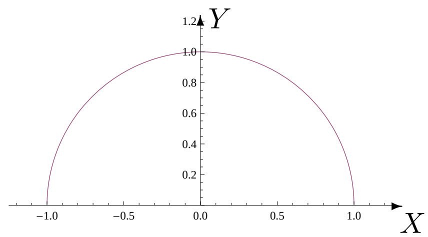


II. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(t, \sqrt{1 - t^2}) : t \in [-1, 1]\}.$$

a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
Des équations paramétriques de cette courbe sont $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$.
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$.
c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
L'équation précédente se transforme en $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$.
d) Représenter graphiquement la courbe.



2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(2\sqrt{1+x^2}, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.

Des équations paramétriques de cette courbe sont $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\sqrt{1+t^2} \\ y = t \end{array} \right., \ t \in \mathbb{R}.$

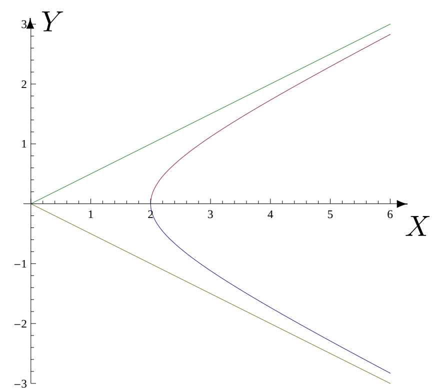
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.

En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $x = 2\sqrt{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R}$.

c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.

L'équation précédente se transforme en $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ avec $x \geq 0$.

d) Représenter graphiquement la courbe.



3. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, |x+y-1| \leq 1\}.$$

a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 1, que vaut ce nombre ?

Ce nombre vaut 1 ou -1.

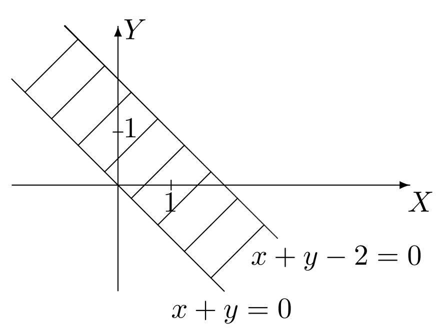
b) Comment écrire $|x+y-1| = 1$ de façon équivalente ?

L'équation $|x+y-1| = 1$ est équivalente à $x+y-2=0$ ou $x+y=0$.

c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.

d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?

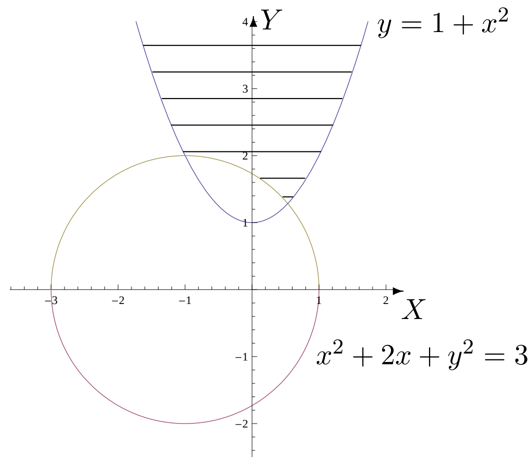
Les points des ≪ bords ≫ sont compris dans l'ensemble.



4. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \geq 1+x^2 \text{ et } x^2+2x+y^2 \geq 3\right\}.$$

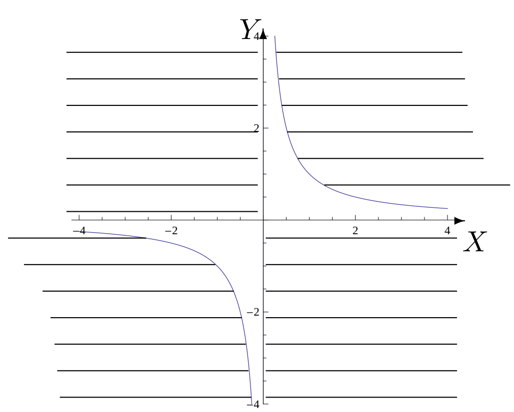
a) Représenter la courbe d'équation $y = 1+x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2+2x+y^2=3$.
b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y \geq 1+x^2$.
c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2+2x+y^2 \geq 3$.
d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ? Les points des ≪ bords ≫ sont compris dans l'ensemble.



5. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xy} \leq 1\right\}.$$

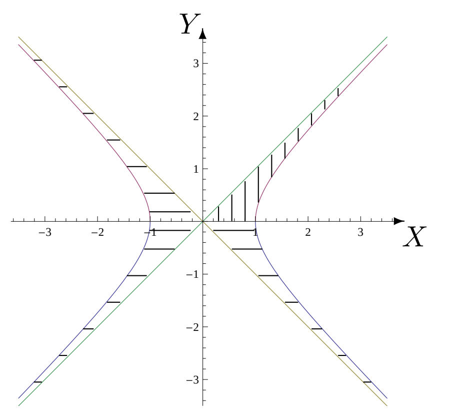
a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
Puisque $xy \neq 0$, les points des axes ne peuvent appartenir à l'ensemble.
b) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
c) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non les points des axes.



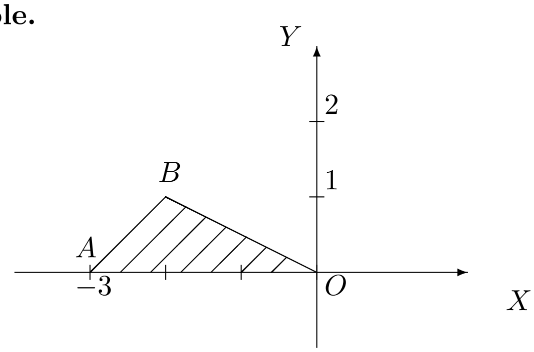
6. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x^2-y^2} \geq 1\right\}.$$

a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
Puisque $x^2 - y^2 \neq 0$, les points des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ ne peuvent appartenir à l'ensemble.
b) Si $P_1(x, y)$ avec $x, y > 0$ appartient à l'ensemble, que peut-on dire des points $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$, $P_4(x, -y)$ à propos de leur éventuelle appartenance à l'ensemble ?
Si $P_1(x, y)$ avec $x, y > 0$ appartient à l'ensemble alors les points $P_2(-x, y)$, $P_3(-x, -y)$ et $P_4(x, -y)$ appartiennent aussi à l'ensemble.
c) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
d) Quel est le signe de la fraction $\dfrac{1}{x^2 - y^2}$? Que peut-on en déduire ?
La fraction $\dfrac{1}{x^2 - y^2}$ est positive puisqu'elle est supérieure ou égale à 1. Dès lors, $x^2 - y^2 > 0$ et l'inéquation est équivalente à $0 < x^2 - y^2 \leq 1$.
e) Dans le premier quadrant, hachurer l'ensemble des points correspondants à $\dfrac{1}{x^2 - y^2} \geq 1$.
f) Dans une autre couleur, hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non ceux des asymptotes.



7. **Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.**



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.
Les coordonnées des sommets sont les suivantes : $A(-3, 0)$, $B(-2, 1)$ et $O(0, 0)$.
b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.
La droite AB a pour équation cartésienne $x - y + 3 = 0$.
L'équation de BO est $x + 2y = 0$ et celle de AO est $y = 0$.

c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.
On a $\quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x+3,\ y \leq -\frac{x}{2},\ y \geq 0\}$.
d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?
L'ensemble de variation des ordonnées des points de E est $[0,1]$.
e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
Pour un y fixé dans $[0,1]$, l'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[y-3,-2y]$.
f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.
On peut aussi décrire analytiquement E par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [y-3,-2y]\}$.
g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
L'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[-3,0]$.
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si non, que doit-on faire ?
Non, y ne varie pas entre les mêmes bornes si $x \in [-3,-2]$ ou si $x \in [-2,0]$.
Si x est fixé dans $[-3,-2]$ alors y varie dans $[0,x+3]$ et si x est fixé dans $[-2,0]$ alors y varie dans $[0,-\frac{x}{2}]$.
i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.
On a aussi la description suivante

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,-2],\ y \in [0,x+3]\big\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0],\ y \in \left[0,-\frac{x}{2}\right]\right\}.$$