Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

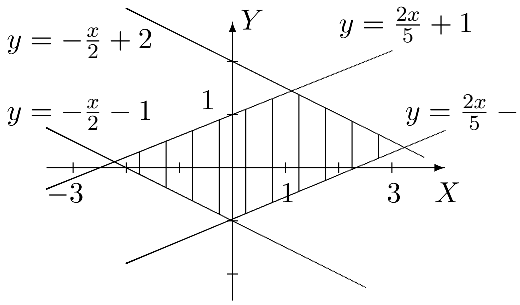
Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Répétition 3 Biologie : correction

Version 24 février 2012

I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x+2y < 4,\ -5 < 2x-5y < 5\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

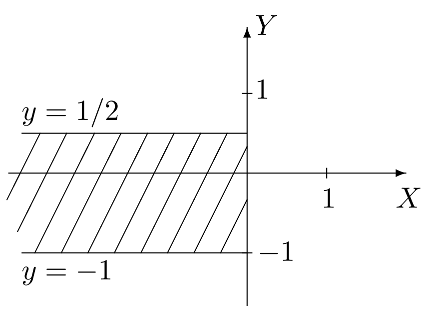
Les dérivées partielles sont

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x+2y, 2x-5y).1 + (D_vf)(x+2y, 2x-5y).2$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x+2y, 2x-5y).2 + (D_vf)(x+2y, 2x-5y).(-5)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln\frac{\pi}{3},+\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in]-1, 1/2[\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y) = (D_ug)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\exp(x)$$

$$(D_yG)(x,y) = (D_vg)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\left(\frac{-1}{\arccos(y)\sqrt{1-y^2}}\right)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.**
a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1)$.
b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en $1/3$?

a) Le domaine de dérivabilité de f est $A =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}[$.
b) La dérivée de f est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_v g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$

$$+(D_w g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).2t$$

où u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.
c) La fonction f n'est pas dérivable en $1/3$.

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ **et** $(D_y f)(2,7) = -8$**. En supposant** F **dérivable en** 3**, que vaut (DF)(3) ?**

   On a $(DF)(3) = (D_x f)(2,7).(D_t x)(3) + (D_y f)(2,7).(D_t y)(3) = 62$.

4. **Soit** $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$**. Sachant que** F **est dérivable en** $(1,0)$ **et que**

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

   et $(D_u f)(2,3) = -1$ **et** $(D_v f)(2,3) = 10$**, calculer** $(D_s F)(1,0)$ **et** $(D_t F)(1,0)$**.**

   On a $(D_s F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_s u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_s v)(1,0) = 52$ et $(D_t F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_t u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_t v)(1,0) = 34$

5. **On donne la fonction** $(x,y) \mapsto f(x,y)$ **définie et 2 fois continûment dérivable sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires** $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ ($r > 0$ **et** $\theta \in [0, 2\pi[$) **et on considère** $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$**. Montrer que**

$$(D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$$

II. Permutation de l'ordre d'intégration

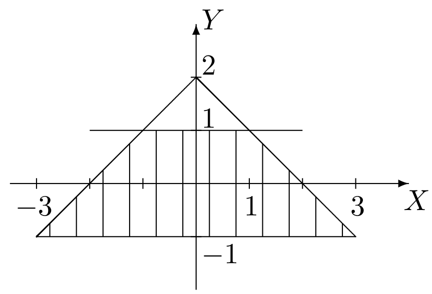
1. **Si la fonction est intégrable sur l'ensemble considéré, permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{1}\left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3}\left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

   a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy\right) dx$$

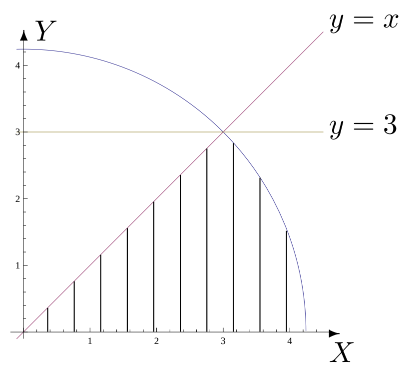
   et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

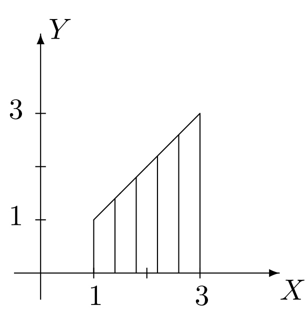
$$\int_0^3 \left(\int_0^x \ f(x,y)\ dy \right) dx + \int_3^{3\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{18-x^2}} \ f(x,y)\ dy \right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A \ f(x,y) dx\, dy.$$



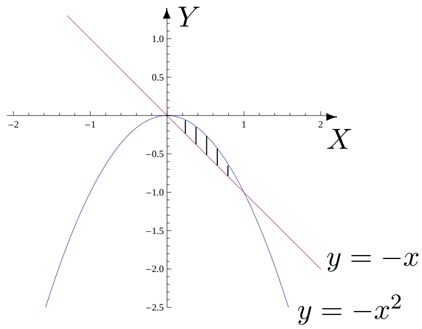
L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^x \ f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^3 \ f(x,y)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_y^3 \ f(x,y)\ dx \right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.

b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x\cos(y)$.



L'expression analytique de A est $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in [-x, -x^2]\}$ ou encore
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-y, \sqrt{-y}]\}$.
La fonction f est intǵrable sur A et son intégrale vaut $\sin 1 - \frac{1}{2}(\cos 1 + 1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x, y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [1 + x^2, 9 - x^2]\}$
   b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-x, 1]\}$
   c) $f(x, y) = 2x + y$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{-x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$

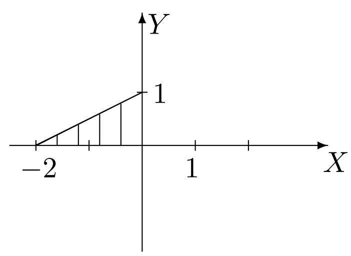
   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{512}{5}$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin 1$.

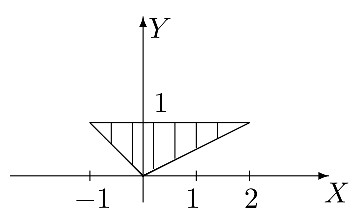
   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

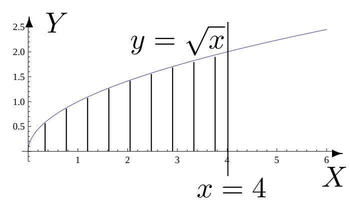
   a) $\int\int_A e^{x-y}\ dx\, dy$



   b) $\int\int_A xy\ dx\, dy$



   c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}\ dx\, dy$



   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\left(\dfrac{1}{e} - 1\right)^2$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{3}{8}$.

   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$.