1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 4
Répétition 4 : correction

Version 30 novembre 2011(V1 : 29/08/09)

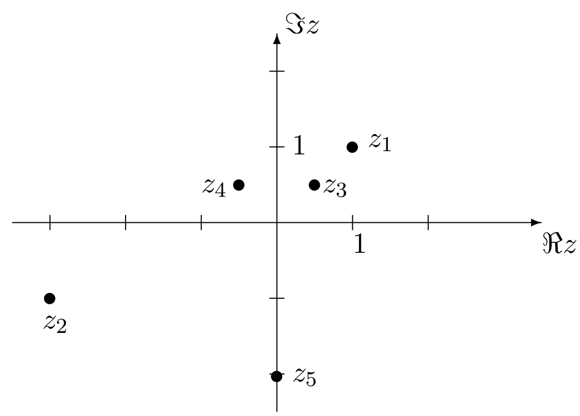
I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$i+1, \quad (-i+1)(-1-2i), \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{i^7}{i-1}, \quad (1-i)^2$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = i+1$	1	1	$1-i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = (-i+1)(-1-2i)$	-3	-1	$-3+i$	$\sqrt{10}$
$z_3 = \frac{1}{-i+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_4 = \frac{i^7}{i-1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_5 = (1-i)^2$	0	-2	$2i$	2



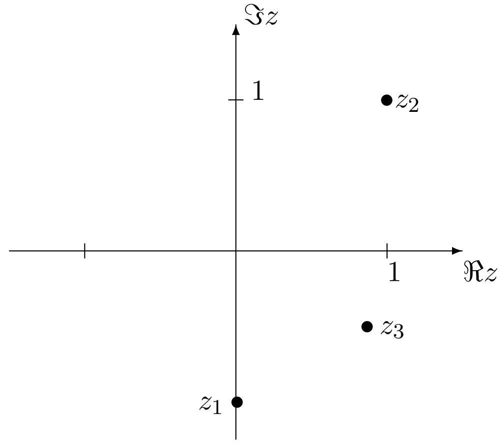
2. **Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$-i, \quad i+1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i).$$

On a

$$z_1 = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad z_2 = i+1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right).$$

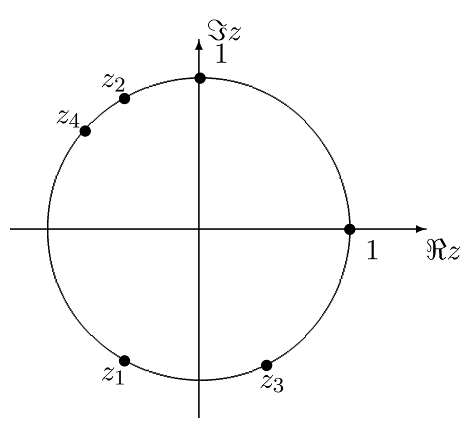


3. **On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫) en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$**

$$\cos\alpha - i\sin\alpha, \quad \frac{1}{\cos\alpha - i\sin\alpha}, \quad (\cos 1 + i\sin 1)(\cos\alpha - i\sin\alpha), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha + i\sin\alpha$	1
$z_2 = \frac{1}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha - i\sin\alpha$	1
$z_3 = (\cos 1 + i\sin 1)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$	$\cos(1-\alpha)$	$\sin(1-\alpha)$	$\cos(1-\alpha) - i\sin(1-\alpha)$	1
$z_4 = \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$-\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha)$	1



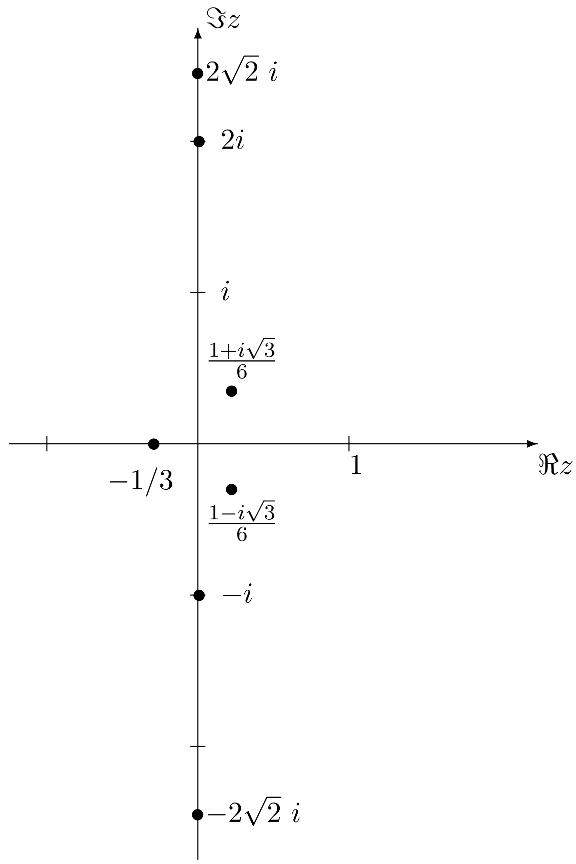
4. **Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$z^2 + 8 = 0, \quad 27z^3 + 1 = 0, \quad z^2 + 2 = iz$$

L'ensemble des solutions de la première équation est $S = \{-2\sqrt{2}\ i, 2\sqrt{2}\ i\}$.
L'ensemble des solutions de la deuxième équation est

$$S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$$

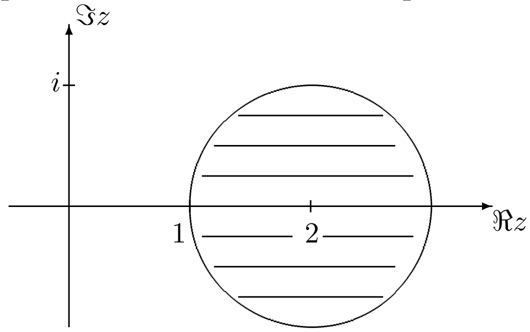
L'ensemble des solutions de la troisième équation est $S = \{-i, 2i\}$.



$\boxed{\text{II. Divers}}$

1. **Reprendre l'exercice IV.4 de la liste 2 et l'interpréter en utilisant les nombres complexes.**
   Le point P_1 de coordonnées cartésiennes $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ est le point-image du complexe $z_1 = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
   Le point P_2 de coordonnées cartésiennes $(r\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), r\sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$ est le point-image du complexe $z_2 = r(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$.
   Si on multiplie z_1 par $z = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})$, on obtient z_2. Ainsi, la rotation de 30° dans le sens trigonométrique correspond à une multiplication du complexe z_1 par le complexe z.

2. **Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z-2| \leq 1$.**



Les points du cercle (le ≪ bord ≫) sont compris dans l'ensemble.

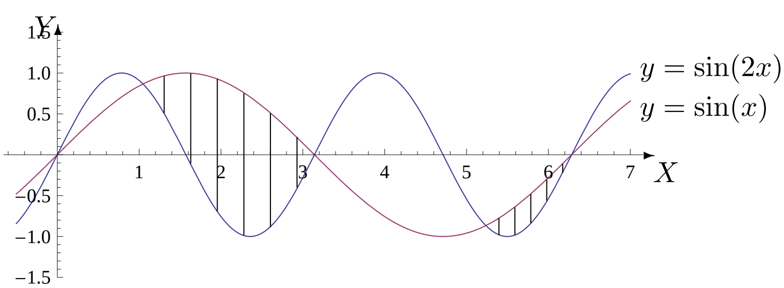
3. **On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3, \Re z \geq 0, \Im z \leq 0\}.$$

On a
$$A = \left\{(r,\theta) : r \in]0,3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right\}.$$

4. **On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.**

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin x\}.$$



Les points des ≪ bords ≫ sont compris dans l'ensemble.