1, 2, 3...Sciences

Année académique 2011-2012

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 4 (tous sauf Bio) : correction

Version 23 février 2012

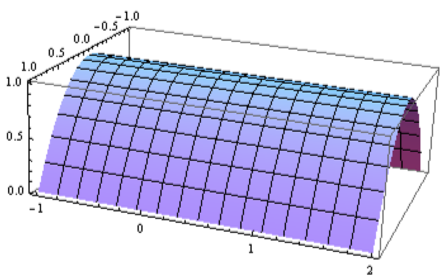
I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

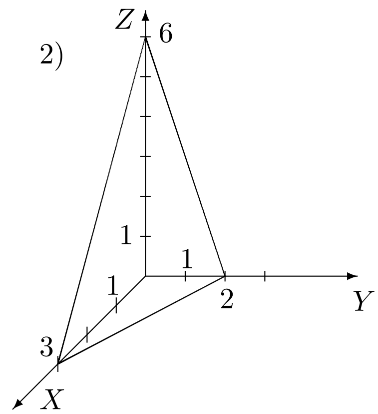
1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -1$ **et** $y = 2$**.**
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $2x+3y+z = 6$
3. (*)[1] **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1-4x^2-y^2$ **et le plan d'équation** $z = 0$**.**

Le volume du premier corps vaut 4 (unités de volume), celui du deuxième vaut 6 et celui du troisième vaut $\dfrac{\pi}{4}$.
Les représentations graphiques sont les suivantes :

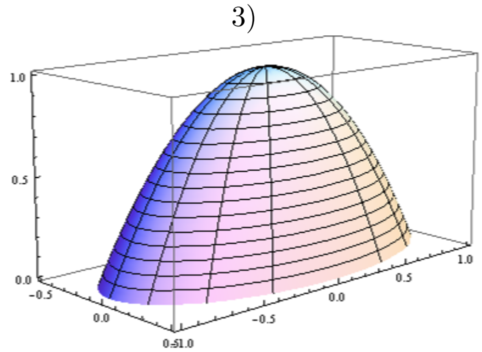
1)



2)



3)



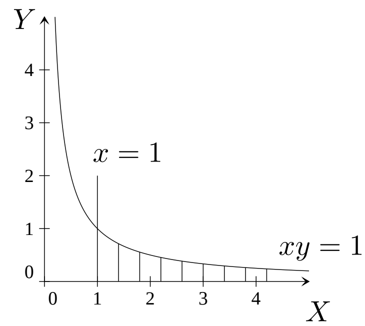
II. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

   a) $\displaystyle\int\int_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

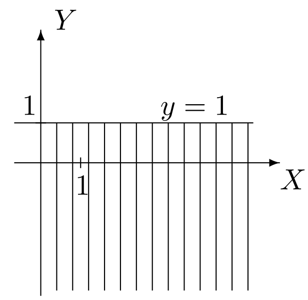
1. Pour les physiciens ... et ceux qui veulent !

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



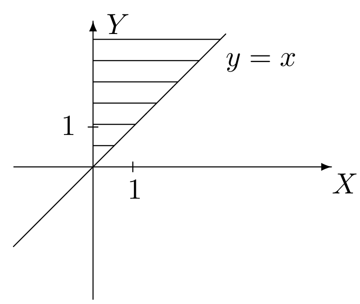
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_{0}^{+\infty} e^{y-3x} \, dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[, \; y \in]-\infty, 1]\}$ et son intégrale vaut $\dfrac{e}{3}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



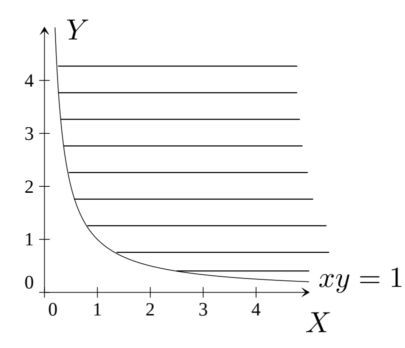
c) $\displaystyle\int\int_{A} e^{-y^2} \, dx \, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\int\int_{A} x^3 \, e^{-x^2 y} \, dx \, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \; 1 \leq xy\}$

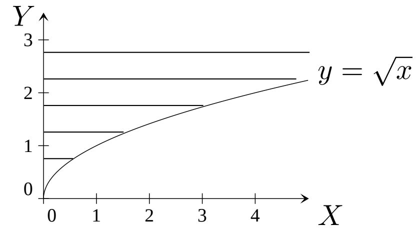
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



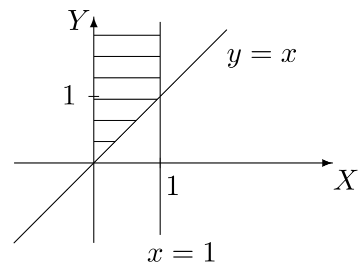
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$a)\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{y^2} \frac{y e^{-y^2}}{x + y^2} \, dx \right) dy, \quad b)\ \int_{0}^{1} \left(\int_{x}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + y^2} \, dy \right) dx, \quad c)\ \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{x^2} \frac{1}{x + y} \, dy \right) dx$

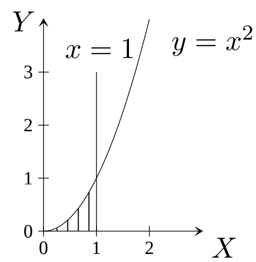
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[,\ x \in [0,y^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln 2$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



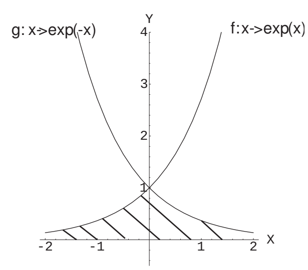
b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0,x^2]\}$ et son intégrale vaut $2\ln 2 - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. (*) [2] **Calculer l'intégrale de $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)**



Une description analytique de l'ensemble d'intégration est donnée par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty,0],\ y \in [0,e^x]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,e^{-x}]\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,1],\ x \in [\ln(y), -\ln(y)]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

et l'intégrale vaut $-\frac{1}{2}$.

2. Destinés à tous sauf aux géologues.

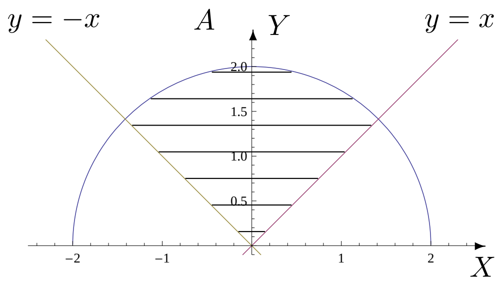
III. Intégration par changement de variables polaires

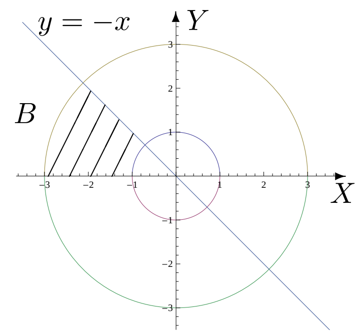
1. **Si elle existe, calculer**

   a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   b) $\displaystyle\int\int_B xy\,dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   c) $\displaystyle\int\int_C (2x+y)\,dx\,dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





   Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{4\pi}{3}$, -5 et $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\ dx\ dy$$

   et où s est l'aire de la surface A.
   Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

   La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi}, \dfrac{3R}{2\pi}\right)$.

3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 9 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

   Le volume du corps est $\dfrac{81\pi}{2}$ (unités de volume).

IV. Divers

La masse d'une plaque plane est donnée par

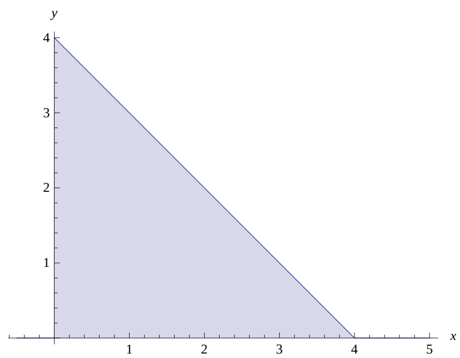
$$m = \int\int_R \delta(x,y)dxdy,$$

où $\delta(x,y)$ est la densité au point de coordonnées (x,y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$.

Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [3], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) **quelle est la masse de cette plaque ?**

b) **en quelles unités s'exprime la constante K ?**



La masse de la plaque est $\frac{128K}{3}$ kg et la constante K s'exprime en kg/m^4.

3. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)